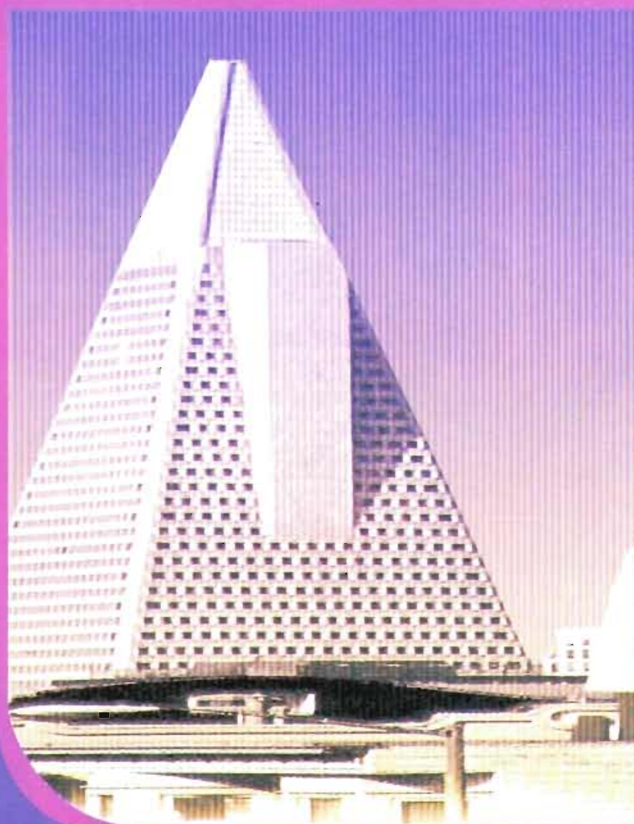
VŨ TUẤN (Chủ biên) – TRẦN VĂN HẠO
ĐÀO NGỌC NAM – LÊ VĂN TIẾN – VŨ VIẾT YÊN

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11







NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ TUẤN (Chủ biên)
TRẦN VĂN HẠO - ĐÀO NGỌC NAM
LÊ VĂN TIẾN - VŨ VIẾT YÊN

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01 – 2011/CXB/824 – 1235/GD

Mã số : CB103T1

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Hàm số lượng giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số sin

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

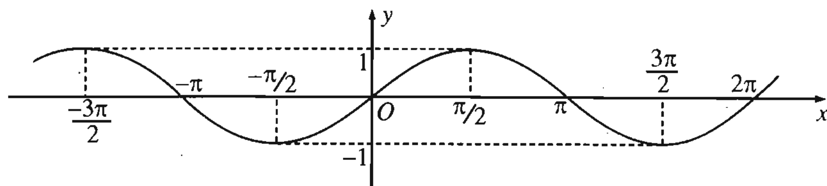
$y = \sin x$ là hàm số lẻ.

$y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\sin x = 0$ khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ (H.1) :



Hình 1

2. Hàm số côsin

Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

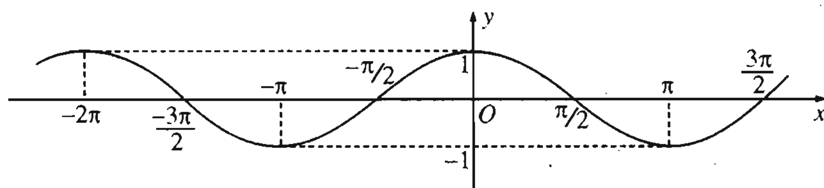
$y = \cos x$ là hàm số chẵn.

$y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\cos x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1$ khi $x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = -1$ khi $x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ (H.2) :



Hình 2

3. Hàm số tang

Hàm số $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$y = \tan x$ là hàm số lẻ.

$y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

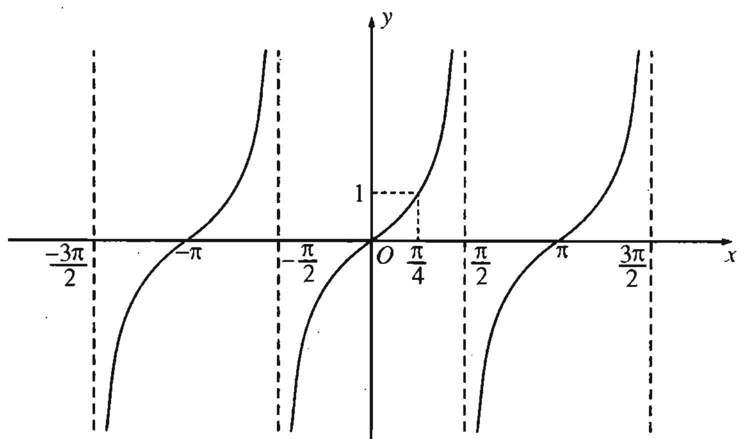
Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\tan x = 0$ khi $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan x = 1$ khi $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan x = -1$ khi $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \tan x$ (H.3) :



Hình 3

4. Hàm số côtang

Hàm số $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$y = \cot x$ là hàm số lẻ.

$y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

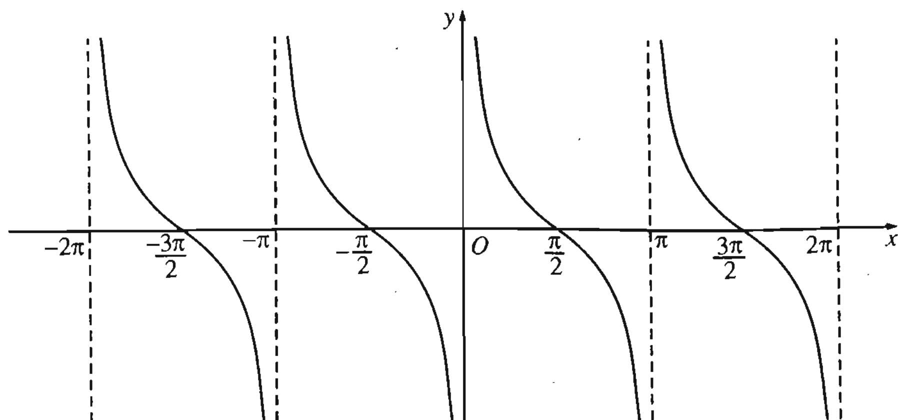
Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\cot x = 0$ khi $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- $\cot x = 1$ khi $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- $\cot x = -1$ khi $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ (H.4) :



Hình 4

B. VÍ DỤ

● ***Ví dụ 1***

Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos\frac{2}{x}$;

c) $y = \cos\sqrt{x}$;

d) $y = \sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Giải

a) Đặt $t = 3x$, ta được hàm số $y = \sin t$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Mặt khác, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{t}{3} \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số $y = \sin 3x$ là $\mathbb{R}$.

b) Ta có $\frac{2}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \cos\frac{2}{x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Ta có $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 0$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \cos\sqrt{x}$ là $D = [0 ; +\infty)$.

d) Ta có

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ là $D = [-1\ ;\ 1)$.

• *Ví dụ 2*

Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{3}{2\cos x}$;

b) $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$;

d) $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$.

Giải

a) Hàm số $y = \frac{3}{2\cos x}$ xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

hay $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) Hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Tập $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ là tập con của tập $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (ứng với các giá trị k chẵn). Vậy tập xác định của hàm số $\frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Biểu thức $\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}$ luôn không âm và nó có nghĩa khi $\cos x + 1 \neq 0$, hay $\cos x \neq -1$. Vậy ta phải có $x \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

• ***Ví dụ 3***

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số :

a) $y = 2 + 3\cos x$;

b) $y = 3 - 4\sin^2 x\cos^2 x$;

c) $y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{3}$;

d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$.

Giải

a) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos x \leq 3$, do đó $-1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi $\cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1, đạt được khi $\cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $y = 3 - 4\sin^2 x\cos^2 x = 3 - (2\sin x\cos x)^2 = 3 - \sin^2 2x$.

Ta có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ nên $-1 \leq -\sin^2 2x \leq 0$.

Vậy $2 \leq y \leq 3$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\sin^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Giá trị lớn nhất của y là 3, đạt được khi $\sin^2 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $0 \le \cos^2 x \le 1$ nên $\frac{1}{3} \le \frac{1 + 4\cos^2 x}{3} \le \frac{5}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{1}{3}$, đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của y là $\frac{5}{3}$, đạt được khi $\cos^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x = 1 - 2\cos 2x$.

Vì $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên $-2 \le -2\cos 2x \le 2$,

do đó $-1 \le 1 - 2\cos 2x \le 3$.

Giá trị nhỏ nhất của y là -1, đạt được khi $\cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị lớn nhất của y là 3, đạt được khi $\cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

• ***Ví dụ 4***

Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số

a) $y = x\cos 3x$;

b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$;

c) $y = x^3 \sin 2x$;

d) $y = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$.

Giải

a) Kí hiệu $f(x) = x\cos 3x$. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có với $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = (-x)\cos 3(-x) = -x\cos 3x = -f(x).$$

Vậy $y = x\cos 3x$ là hàm số lẻ.

b) Biểu thức $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Với $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, do đó với $x \in D$ thì $-x \in D$. Ta có

$$f(-x) = (-x)^3 \sin 2(-x) = x^3 \sin 2x = f(x).$$

Vậy $y = x^3 \sin 2x$ là hàm số chẵn.

d) Biểu thức $f(x) = \dfrac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\cos 2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Với $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \dfrac{-x^3 + \sin x}{\cos 2x} = -f(x)$, do đó hàm số $y = \dfrac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$ là hàm số lẻ.

• ***Ví dụ 5***

a) Chứng minh rằng $\cos\frac{1}{2}(x+4k\pi)=\cos\frac{x}{2}$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$;

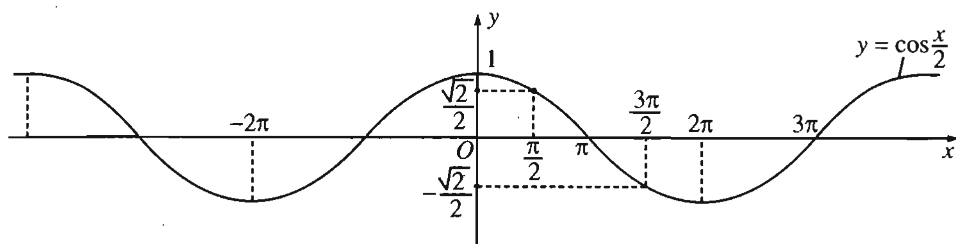
b) Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

Giải

a) Ta có $\cos\frac{1}{2}(x+4k\pi)=\cos\left(\frac{x}{2}+2k\pi\right)=\cos\frac{x}{2}$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$, do đó hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì 4π. Vì vậy ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$ trên một đoạn có độ dài 4π, rồi tịnh tiến song song với trục Ox các đoạn có độ dài 4π ta sẽ được đồ thị hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$.

Hơn nữa, vì $y=\cos\frac{x}{2}$ là hàm số chẵn, nên ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số đó trên đoạn $[0\ ;\ 2\pi]$ rồi lấy đối xứng qua trục tung, sẽ được đồ thị hàm số trên đoạn $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

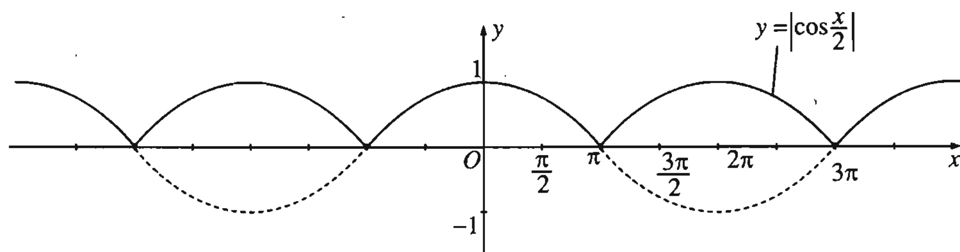
Đồ thị hàm số được biểu diễn trên hình 5.



Hình 5

b) Ta có $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \cos\frac{x}{2}, \text{ nếu } \cos\frac{x}{2} \geq 0 \\ -\cos\frac{x}{2}, \text{ nếu } \cos\frac{x}{2} < 0. \end{cases}$

Vì vậy, từ đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ ta giữ nguyên những phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành những phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành, ta được đồ thị hàm số $y = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$ (H.6).



Hình 6

C. BÀI TẬP

1.1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \cos\frac{2x}{x-1}$; b) $y = \tan\frac{x}{3}$;

c) $y = \cot 2x$; d) $y = \sin\frac{1}{x^2 - 1}$.

1.2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{\cos x + 1}$; b) $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$;

c) $y = \frac{2}{\cos x - \cos 3x}$; d) $y = \tan x + \cot x$.

1.3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 3 - 2|\sin x|$; b) $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$; d) $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}$.

1.4. Với những giá trị nào của x, ta có mỗi đẳng thức sau ?

a) $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$; b) $\dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$;

c) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$; d) $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

1.5. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = \dfrac{\cos 2x}{x}$; b) $y = x - \sin x$;

c) $y = \sqrt{1 - \cos x}$; d) $y = 1 + \cos x \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

1.6. a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$.

b) Từ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = |\cos 2x|$.

1.7. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 1 + \sin x$; b) $y = \cos x - 1$;

c) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; d) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.8. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; b) $y = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

§2. Phương trình lượng giác cơ bản

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

- $|a| > 1$: phương trình (1) vô nghiệm.

• $|a| \le 1$: gọi α là một cung thoả mãn $\sin\alpha = a$. Khi đó phương trình (1) có các nghiệm là

$$x = \alpha + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và} \quad x = \pi - \alpha + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu α thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$. Khi đó các nghiệm của phương trình (1) là

$$x = \arcsin a + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và} \quad x = \pi - \arcsin a + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\sin x = \sin\beta^o$ có các nghiệm là

$$x = \beta^o + k360^o, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và} \quad x = 180^o - \beta^o + k360^o, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

➤ **Chú ý.** Trong một công thức nghiệm, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

2. Phương trình $\cos x = a$ (2)

• $|a| > 1$: phương trình (2) vô nghiệm.

• $|a| \le 1$: gọi α là một cung thoả mãn $\cos\alpha = a$. Khi đó phương trình (2) có các nghiệm là

$$x = \pm\alpha + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu α thoả mãn điều kiện $0 \le \alpha \le \pi$ và $\cos\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$. Khi đó nghiệm của phương trình (2) là

$$x = \pm\arccos a + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\cos x = \cos\beta^o$ có các nghiệm là

$$x = \pm\beta^o + k360^o, \ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Phương trình $\tan x = a$ (3)

Điều kiện của phương trình (3) : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nếu α thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\tan\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arctan a$. Lúc đó nghiệm của phương trình (3) là

$$x = \arctan a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\tan x = \tan\beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \beta^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$ (4)

Điều kiện của phương trình (4) là $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nếu α thoả mãn điều kiện $0 < \alpha < \pi$ và $\cot\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \text{arccot}\, a$. Lúc đó nghiệm của phương trình (4) là

$$x = \text{arccot}\, a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\cot x = \cot\beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \beta^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}.$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải các phương trình

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin x = \frac{1}{4}$;

c) $\sin(x - 60^{\circ}) = \frac{1}{2}$;

d) $\sin 2x = -1$.

Giải

a) Vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) Phương trình $\sin x = \frac{1}{4}$ có các nghiệm là

$$x = \arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và $x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) Ta có $\frac{1}{2} = \sin 30^o$, nên

$$\sin(x - 60^o) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 60^o) = \sin 30^o.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 60^o = 30^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z} \\ x - 60^o = 180^o - 30^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = 90^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$$

và $x = 210^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}.$

d) Ta có

$$\sin 2x = -1 \text{ (giá trị đặc biệt).}$$

Phương trình có nghiệm là

$$2x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

hay $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• ***Ví dụ 2***

Giải các phương trình

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$;

c) $\cos(2x + 50^{\circ}) = \frac{1}{2}$;

d) $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$.

Giải

a) Vì $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$ nên $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $\cos(x - 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \pm\arccos\frac{2}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \arccos\frac{2}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $\frac{1}{2} = \cos 60^{\circ}$ nên

$$\cos(2x + 50^{\circ}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 50^{\circ}) = \cos 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 50^{\circ} = \pm 60^{\circ} + k360^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -50^{\circ} + 60^{\circ} + k360^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -50^{\circ} - 60^{\circ} + k360^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -55^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

d) Ta có

$$(1+2\cos x)(3-\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+2\cos x=0\\3-\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\\cos x=3.\end{array}\right.$$

Phương trình $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ có các nghiệm là

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

còn phương trình $\cos x=3$ vô nghiệm.

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

• *Ví dụ 3*

Giải các phương trình

a) $\tan 2x=\tan\dfrac{2\pi}{7}$;

b) $\tan(3x-30^{\circ})=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

c) $\cot\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;

d) $\left(\cot\dfrac{x}{3}-1\right)\left(\cot\dfrac{x}{2}+1\right)=0.$

Giải

a) $\tan 2x=\tan\dfrac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 2x=\dfrac{2\pi}{7}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{7}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\tan(3x-30^{\circ})=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x-30^{\circ})=\tan(-30^{\circ})$

$$\Leftrightarrow 3x-30^{\circ}=-30^{\circ}+k180^{\circ},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x=k180^{\circ},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k60^{\circ},\ k\in\mathbb{Z}.$$

c) $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) Điều kiện : $\sin\frac{x}{3} \neq 0$ và $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Khi đó ta có

$$\left(\cot\frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot\frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot\frac{x}{2} + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot\frac{x}{3} = 1 \\ \cot\frac{x}{2} = -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• ***Ví dụ 4***

Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cot x = 0$;

b) $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$;

c) $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0.$

Giải

a) Điều kiện của phương trình $\sin 2x \cot x = 0$ (1)
là $\sin x \neq 0$.

Ta biến đổi phương trình đã cho

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin x \cos x . \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Điều kiện của phương trình

$$\tan(x - 30^o)\cos(2x - 150^o) = 0 \quad (2)$$

là $\cos(x - 30^o) \neq 0$.

Ta biến đổi phương trình đã cho

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sin(x - 30^o)}{\cos(x - 30^o)} . \cos(2x - 150^o) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - 30^o) = 0 \\ \cos(2x - 150^o) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 30^o = k180^o, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - 150^o = \pm 90^o + k360^o, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30^o + k180^o, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 240^o + k360^o, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 60^o + k360^o, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30^o + k180^o, k \in \mathbb{Z} \\ x = 120^o + k180^o, k \in \mathbb{Z} \\ x = 30^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Khi thay vào điều kiện $\cos(x - 30^o) \neq 0$, ta thấy giá trị $x = 120^o + k180^o$ không thoả mãn, còn giá trị $x = 30^o + k180^o$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 30^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện của phương trình

$$(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0 \quad (3)$$

là $\cos x \neq 0$. Ta có

$$(3) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, trong đó tập các giá trị $\left\{\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập con của tập các giá trị $\left\{\dfrac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$ (ứng với các giá trị l chẵn).

Vậy nghiệm của phương trình (3) là $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

và $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• ***Ví dụ 5***

Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số tương ứng sau bằng nhau ?

a) $y = \sin 3x$ và $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $y = \cos(2x + 1)$ và $y = \cos(x - 2)$;

c) $y = \tan 3x$ và $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Giải

Trước hết, mở rộng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, ta có các công thức sau. Với $u(x)$ và $v(x)$ là hai biểu thức của x thì

• $\sin u(x) = \sin v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x) = v(x) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ u(x) = \pi - v(x) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

• $\cos u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow u(x) = \pm v(x) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• $\tan u(x) = \tan v(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• $\cot u(x) = \cot v(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Áp dụng các công thức mở rộng này cho các bài toán trong Ví dụ 5, ta có :

a) $\sin 3x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy với $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bằng nhau.

b) $\cos(2x + 1) = \cos(x - 2) \quad \Leftrightarrow 2x + 1 = \pm(x - 2) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = x - 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x + 1 = -x + 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy với $x = -3 + k2\pi$ hoặc $x = \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \cos(2x + 1)$ và $y = \cos(x - 2)$ bằng nhau.

c) Điều kiện : $\cos 3x \neq 0$ và $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \neq 0$. Khi đó

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \tan 3x$ và $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ bằng nhau.

C. BÀI TẬP

2.1. Giải các phương trình

a) $\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin(2x - 15^{o}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin\left(\dfrac{x}{2} + 10^{o}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

d) $\sin 4x = \dfrac{2}{3}$.

2.2. Giải các phương trình

a) $\cos(x + 3) = \dfrac{1}{3}$;

b) $\cos(3x - 45^{o}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

d) $(2 + \cos x)(3\cos 2x - 1) = 0$.

2.3. Giải các phương trình

a) $\tan(2x + 45^{o}) = -1$;

b) $\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

c) $\tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{8}$;

d) $\cot\left(\dfrac{x}{3} + 20^{o}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x - 1} = 0$;

b) $\cos 2x \cot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

c) $\tan(2x + 60^{o})\cos(x + 75^{o}) = 0$;

d) $(\cot x + 1)\sin 3x = 0$.

2.5. Tìm những giá trị của x để giá trị của các hàm số tương ứng sau bằng nhau

a) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ và $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$;

b) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

c) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right)$ và $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{5} - x\right)$;

d) $y = \cot 3x$ và $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2.6. Giải các phương trình

a) $\cos 3x - \sin 2x = 0$;

b) $\tan x \tan 2x = -1$;

c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$;

d) $\cot 2x \cot 3x = 1$.

§3. Một số phương trình lượng giác thường gặp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Các phương trình dạng $at + b = 0$ $(a \neq 0)$, với t là một trong các hàm số lượng giác, là những phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, có thể đưa nhiều phương trình lượng giác về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Các phương trình dạng $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$, với t là một trong các hàm số lượng giác, là những phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Có nhiều phương trình lượng giác có thể đưa về phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác bằng các phép biến đổi lượng giác. Một số dạng chính sẽ được nêu trong ví dụ.

3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Xét phương trình

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái của phương trình (1) về dạng

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha),$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

ta đưa phương trình (1) về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Giải các phương trình

a) $\sin 2x - 2\cos x = 0$;

b) $8\cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2}$;

c) $\tan 2x - 2\tan x = 0$;

d) $2\cos^2 x + \cos 2x = 2$.

Giải

a) Ta có

$$\sin 2x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập con của tập $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$8\cos 2x\sin 2x\cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sin 4x\cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 8x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ 8x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{3\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \quad \text{và } x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện : $\cos 2x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$.

Ta có

$$\tan 2x - 2\tan x = 0 \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} - 2\tan x = 0 \Leftrightarrow 2\tan x\left(\frac{1}{1 - \tan^2 x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có

$$2\cos^2 x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 1 + 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 2***

Giải các phương trình

a) $\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0$;

b) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$;

c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x$;

d) $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2}$.

Giải

a) $$\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + \cos 5x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \text{và} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có

$$\sin 7x - \sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x\sin 2x - \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) Ta có

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 3x \sin(-x) - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\ ;\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ và } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) Ta có

$$\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2} \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}.2\sin x\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x}{2} = 0\\ \sin x = 0\\ \cos\dfrac{x}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ là tập con của tập $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = k\frac{2\pi}{3}$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 3***

Giải các phương trình

a) $2\cos^2 2x + 3\sin^2 x = 2$;

b) $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$;

c) $2 - \cos^2 x = \sin^4 x$;

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Giải

a) Ta có

$$2\cos^2 2x + 3\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3.\frac{1-\cos 2x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 3\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có

$$\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = -2.\end{array}\right.$$

Phương trình $\cos x = -2$ vô nghiệm, còn phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) Ta có

$$2 - \cos^2 x = \sin^4 x \Leftrightarrow 2 - (1 - \sin^2 x) = \sin^4 x$$
$$\Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x$, với điều kiện $0 \le t \le 1$, ta được phương trình $t^2 - t - 1 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Vì $t_1 < 0,\ t_2 > 1$ nên hai giá trị này không thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2.\frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -2.\end{array}\right.$$

Phương trình $\sin 2x = -2$ vô nghiệm, còn phương trình $\sin 2x = 1$ có nghiệm $2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• ***Ví dụ 4***

Giải các phương trình

a) $3\tan x + \sqrt{3}\cot x - 3 - \sqrt{3} = 0$;

b) $\dfrac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x - 4\cos^2 x} = \tan^2 x$;

c) $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}.$

Giải

a) $3\tan x + \sqrt{3}\cot x - 3 - \sqrt{3} = 0$ (1)

Điều kiện của phương trình (1) là $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

$$(1) \quad \Leftrightarrow 3\tan x + \frac{\sqrt{3}}{\tan x} - 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - (3 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình (1). Vậy các nghiệm của phương trình (1) là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\dfrac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x - 4\cos^2 x} = \tan^2 x.$ (2)

Điều kiện của phương trình (2) là $\cos x \neq 0$ và $\sin^2 2x - 4\cos^2 x \neq 0$. Ta có

$$\sin^2 2x - 4\cos^2 x = 4\sin^2 x\cos^2 x - 4\cos^2 x$$
$$= 4\cos^2 x(\sin^2 x - 1) = -4\cos^4 x.$$

Vì vậy $\sin^2 2x - 4\cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$.

Do đó điều kiện của phương trình (2) là $\cos x \neq 0$. Theo biến đổi trên, ta có

$$(2) \quad \Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x - 2}{-4\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 2x - 2 = -4\cos^2 x\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình (2). Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}$. (3)

Điều kiện của phương trình (3) là $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Ta có

$$2\tan x + \cot x = \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + 1}{\frac{1}{2}\sin 2x}.$$

Do đó

$$(3) \Rightarrow \frac{2(\sin^2 x + 1)}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 2x + 1}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 2x) - (1 - \cos 2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình (3). Vậy các nghiệm của phương trình (3) là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 5***

Giải các phương trình

a) $4\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \sin^2 x = 3$;

b) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;

c) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$.

Giải

a) Với $\cos x = 0$ thì vế trái bằng -1 còn vế phải bằng 3 nên $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4 + 3\tan x - \tan^2 x = 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Với $\cos x = 0$ ta thấy cả hai vế của phương trình bằng 2. Vậy $\cos x = 0$ thoả mãn phương trình, hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

Với $\cos \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\tan^2 x - \tan x - 1 = 2(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(-3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \arctan(-3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Với $\cos x = 0$ thì vế trái bằng 4, còn vế phải bằng 1, nên $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\tan^2 x - 4\tan x + 2 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

• ***Ví dụ 6***

Giải các phương trình

a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$;

b) $\cos 3x - \sin 3x = 1$;

c) $4\sin x + 3\cos x = 4(1 + \tan x) - \dfrac{1}{\cos x}$.

Giải

a) Ta có

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$\cos 3x - \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện của phương trình là $\cos x \neq 0$.

Ta có

$$4\sin x + 3\cos x = 4(1 + \tan x) - \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x) = 4(\sin x + \cos x) - 1$

$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x) - \cos x = 4\sin x + 3\cos x - 1$

$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x - 1) = 4\sin x + 3\cos x - 1$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(4\sin x + 3\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ 4\sin x + 3\cos x = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = \frac{1}{5}.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Kí hiệu α là cung mà $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ta được

(2) $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x - \alpha = \pm\arccos\frac{1}{5} + k2\pi \ \Leftrightarrow x = \alpha \pm \arccos\frac{1}{5} + k2\pi.$

Vậy các nghiệm của phương trình (1) là

$x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \alpha \pm \arccos\frac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$.

C. BÀI TẬP

Giải các phương trình sau (3.1 – 3.7) :

3.1. a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$;

b) $\cos x\cos 2x = 1 + \sin x\sin 2x$;

c) $4\sin x\cos x\cos 2x = -1$;

d) $\tan x = 3\cot x$.

3.2. a) $\sin x + 2\sin 3x = -\sin 5x$;

b) $\cos 5x\cos x = \cos 4x$;

c) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$.

3.3. a) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$;

b) $5\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0$;

c) $\sin^6 x + \cos^6 x = 4\cos^2 2x$;

d) $-\frac{1}{4} + \sin^2 x = \cos^4 x$.

3.4. a) $2\tan x - 3\cot x - 2 = 0$;

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x + 3$;

c) $\cot x - \cot 2x = \tan x + 1$.

3.5. a) $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$;

b) $3\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x = 1$;

c) $4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$.

3.6. a) $2\cos x - \sin x = 2$;

b) $\sin 5x + \cos 5x = -1$;

c) $8\cos^4 x - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$;

d) $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$.

3.7. a) $1 + \sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0$;

b) $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$;

c) $\cos x\tan 3x = \sin 5x$;

d) $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$.

Bài tập ôn chương I

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \dfrac{2 - \cos x}{1 + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$;

b) $y = \dfrac{\tan x + \cot x}{1 - \sin 2x}$.

2. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = \sin^3 x - \tan x$;

b) $y = \dfrac{\cos x + \cot^2 x}{\sin x}$.

3. Chia các đoạn sau thành hai đoạn, trên một đoạn hàm số $y = \sin x$ tăng, còn trên đoạn kia hàm số đó giảm :

a) $\left[\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right]$;

b) $[-\pi ; 0]$;

c) $[-2\pi ; -\pi]$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 3 - 4\sin x$; b) $y = 2 - \sqrt{\cos x}$.

5. Vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = \sin 2x + 1$; b) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Giải các phương trình sau (6 – 15) :

6. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

7. $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$.

8. $3\sin^2 x + 4\cos x - 2 = 0$.

9. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

10. $2\tan x + 3\cot x = 4$.

11. $2\cos^2 x - 3\sin 2x + \sin^2 x = 1$.

12. $2\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 3$.

13. $3\sin x - 4\cos x = 1$.

14. $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0$.

15. $2\tan^2 x - 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x - 3 = 0$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG I

§1.

1.1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $\cos\frac{x}{3} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

1.2. a) $\cos x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $D = \mathbb{R}$.

b) $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\cos x - \cos 3x = -2\sin 2x \sin(-x) = 4\sin^2 x \cos x$.

Do đó $\cos x - \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\tan x$ và $\cot x$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$.

Vậy tập xác định như trong câu c).

1.3. a) $0 \leq |\sin x| \leq 1$ nên $-2 \leq -2|\sin x| \leq 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $y = 3 - 2|\sin x|$ là 3, đạt được khi $\sin x = 0$; giá trị nhỏ nhất của y là 1, đạt được khi $\sin x = \pm 1$.

b) $\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $-\sqrt{3}$, đạt được chẳng hạn, tại $x = \frac{7\pi}{6}$; giá trị lớn nhất của y là $\sqrt{3}$, đạt được chẳng hạn, tại $x = \frac{\pi}{6}$.

c) Ta có

$$\cos^2 x + 2\cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 2\cos 2x = \frac{1 + 5\cos 2x}{2}.$$

Vì $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên giá trị lớn nhất của y là 3, đạt được khi $x = 0$; giá trị nhỏ nhất của y là -2, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2}$.

d) HD : $5 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Vì $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}\sin^2 2x \le 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} \le y \le \sqrt{5}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\sqrt{5}$ tại $x = k\frac{\pi}{2}$, giá trị nhỏ nhất là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ tại $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

1.4. a) Đẳng thức xảy ra khi các biểu thức ở hai vế có nghĩa, tức là $\sin x \ne 0$ và $\cos x \ne 0$. Vậy đẳng thức xảy ra khi $x \ne k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Đẳng thức xảy ra khi $\cos x \ne 0$, tức là khi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Đẳng thức xảy ra khi $\sin x \ne 0$, tức là $x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Đẳng thức xảy ra khi $\sin x \ne 0$ và $\cos x \ne 0$, tức là $x \ne k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

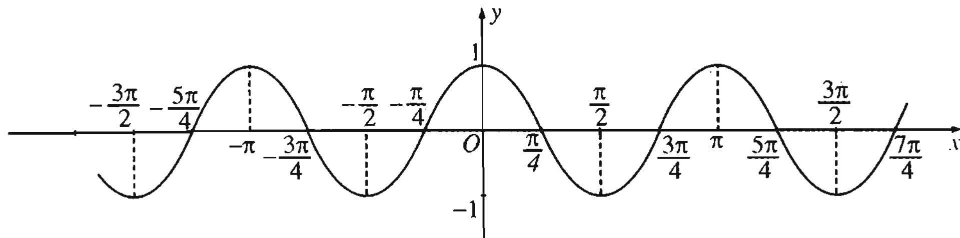
1.5. a) $y = \frac{\cos 2x}{x}$ là hàm số lẻ.

b) $y = x - \sin x$ là hàm số lẻ.

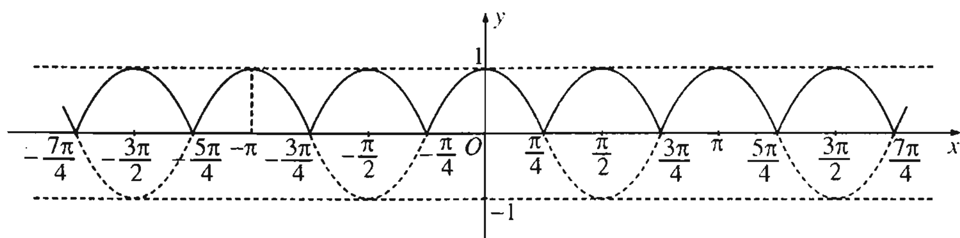
c) $y = \sqrt{1 - \cos x}$ là hàm số chẵn.

d) $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 1 - \cos x \cos 2x$ là hàm số chẵn.

1.6. a) $\cos 2(x + k\pi) = \cos(2x + k2\pi) = \cos 2x$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn, tuần hoàn, có chu kì là π (H.7).



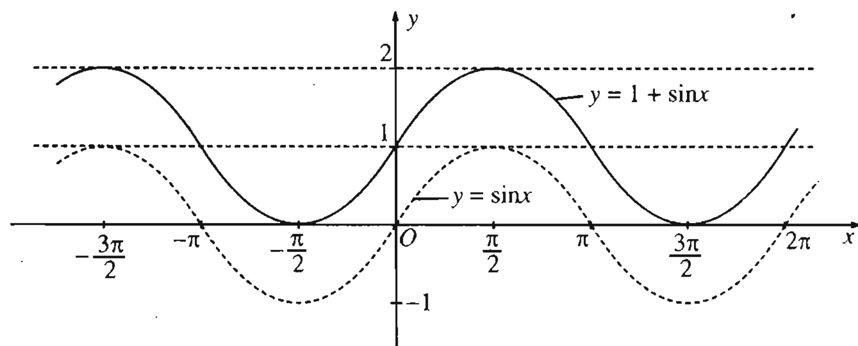
Hình 7



Hình 8

b) Đồ thị hàm số $y = |\cos 2x|$ (H.8).

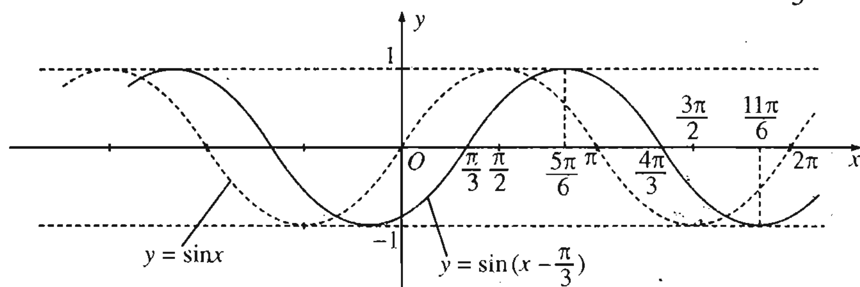
1.7. a) Đồ thị hàm số $y = 1 + \sin x$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung lên phía trên một đơn vị (H.9).



Hình 9

b) Đồ thị hàm số $y = \cos x - 1$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung xuống phía dưới một đơn vị (bạn đọc tự vẽ hình).

c) Đồ thị hàm số $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang phải một đoạn bằng $\frac{\pi}{3}$ (H.10).



Hình 10

d) Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang trái một đoạn bằng $\frac{\pi}{6}$ (bạn đọc tự vẽ hình).

1.8. a) Đồ thị hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \tan x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang trái một đoạn bằng $\frac{\pi}{4}$.

b) Đồ thị hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \cot x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang phải một đoạn bằng $\frac{\pi}{6}$.

§2.

2.1. a) $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = 30^\circ + k180^\circ, k = \mathbb{Z}$ và $x = 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = -80^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = 400^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

2.2. a) $x = -3 \pm \arccos\frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = 25^\circ + k120^\circ, x = 5^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.3. a) $x = -45^{\circ} + k90^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = 300^{\circ} + k540^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}$.

2.4. a) Điều kiện : $\cos 3x \neq 1$. Ta có

$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi$. Do điều kiện, các giá trị $k = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$ bị loại, nên $3x = (2m+1)\pi,\ m \in \mathbb{Z}$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = (2m+1)\dfrac{\pi}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện : $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Biến đổi phương trình

$$\cos 2x.\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos 2x.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Do điều kiện, các giá trị $x = \dfrac{\pi}{4} + 2m\dfrac{\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z}$ bị loại. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{4} + (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện : $\cos(2x + 60^{\circ}) \neq 0$. Ta có

$$\tan(2x + 60^{\circ})\cos(x + 75^{\circ}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(2x + 60^{\circ})\cos(x + 75^{\circ}) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2x + 60^{\circ}) = 0 \\ \cos(x + 75^{\circ}) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 60^{\circ} = k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \\ x + 75^{\circ} = 90^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -30^{\circ} + k90^{\circ},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = 15^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Do điều kiện ở trên, các giá trị $x = 15^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$ bị loại.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -30^o + k90^o$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Điều kiện : $\sin x \neq 0$. Ta có

$$(\cot x + 1)\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = -1 \\ \sin 3x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = k\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Do điều kiện $\sin x \neq 0$ nên những giá trị $x = k\dfrac{\pi}{3}$ với $k = 3m$, $m \in \mathbb{Z}$ bị loại. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ ;\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ và } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2.5. a) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} - x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị cần tìm là $x = \dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \dfrac{\pi}{4} = x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \dfrac{13\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{13\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị cần tìm là $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{13\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \neq 0 \text{ và } \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \neq 0 & (1) \\ 2x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Các giá trị này thoả mãn điều kiện (1). Vậy ta có $x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cot 3x = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \text{ và } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 & (3) \\ 3x = x + \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. & (4) \end{cases}$$

(4) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nếu $k = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$ thì các giá trị này không thoả mãn điều kiện (3).

Suy ra các giá trị cần tìm là $x = \frac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

2.6. a) $\cos 3x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện của phương trình : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$.

$\tan x \tan 2x = -1 \quad \Rightarrow \sin x \sin 2x = -\cos x \cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$.

Kết hợp với điều kiện, ta thấy phương trình vô nghiệm.

c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$ và $\sin 3x \neq 0$.

$\cot 2x \cot 3x = 1 \quad \Rightarrow \cos 2x \cos 3x = \sin 2x \sin 3x$

$\Rightarrow \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$

$\Rightarrow \cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Với $k = 2 + 5m$, $m \in \mathbb{Z}$ thì

$x = \frac{\pi}{10} + (2 + 5m)\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + m\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Lúc đó $\sin 2x = \sin(\pi + 2m\pi) = 0$, không thoả mãn điều kiện.

Có thể suy ra nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ và $k \neq 2 + 5m, m \in \mathbb{Z}$.

§3.

3.1. a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

b) $\cos x\cos 2x = 1 + \sin x\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

c) $4\sin x\cos x\cos 2x = -1 \quad \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

d) $\tan x = 3\cot x$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

Ta có $\tan x = \dfrac{3}{\tan x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình nên là nghiệm của phương trình đã cho.

3.2. a) $\sin x + 2\sin 3x = -\sin 5x \quad \Leftrightarrow \sin 5x + \sin x + 2\sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x + 2\sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x(\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 3x\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

b) $\cos 5x\cos x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x \Leftrightarrow 6x = \pm 4x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\\ 10x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ chứa trong tập $\left\{l\dfrac{\pi}{5}, l \in \mathbb{Z}\right\}$ (ứng với các giá trị l là bội số của 5) nên nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x \Leftrightarrow \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - 2\sin x \sin 3x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -2$.

Phương trình vô nghiệm.

➤ **Chú ý.** Có thể nhận xét : Vế phải không dương với mọi x trong khi vế trái dương với mọi x nên phương trình đã cho vô nghiệm.

3.3. a) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow (\sin x - 1)(3\sin x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $5\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow 5(1 - \cos^2 x) + 3\cos x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 x - 3\cos x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(5\cos x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin^6 x + \cos^6 x = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 4\cos^2 2x \quad \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \frac{13}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow 13\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = \frac{2}{13} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{11}{13}$

$\Leftrightarrow 4x = \pm\arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) $-\frac{1}{4} + \sin^2 x = \cos^4 x \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1-\cos 2x}{2} = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow -1 + 2 - 2\cos 2x = 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x = -4 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

3.4. a) $2\tan x - 3\cot x - 2 = 0$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

Ta có $2\tan x - \frac{3}{\tan x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x + 3$.

Ta thấy $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$1 = 6\tan x + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 3\tan^2 x + 6\tan x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

c) $\cot x - \cot 2x = \tan x + 1$. (1)

Điều kiện : $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Khi đó,

$$(1) \quad \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

3.5. a) $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$.

Rõ ràng $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$1 + 2\tan x + 5\tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\dfrac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $3\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x = 1$.

Với $\cos x = 0$ ta thấy hai vế đều bằng 1. Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$3 - 4\tan x + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \Leftrightarrow 4\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$.

Rõ ràng $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4 - 3\tan x + 3\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0.$$

Phương trình cuối vô nghiệm (đối với $\tan x$), do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

3.6. a) $2\cos x - \sin x = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right) = 2.$$

Kí hiệu α là góc mà $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, ta được phương trình

$$\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow x - \alpha = \pm\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = k2\pi,\quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $\sin 5x + \cos 5x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) = -1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin 5x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

c) $8\cos^4 x - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \sin 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 4x + \sin 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \sin 4x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{2}\sin 4x=0$$

$$\Leftrightarrow 8-3+3\cos 4x+4\sin 4x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 4x+4\sin 4x=-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos 4x+\frac{4}{5}\sin 4x=-1.$$

Kí hiệu α là cung mà $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, ta được

$$\sin\alpha\cos 4x+\cos\alpha\sin 4x=-1$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x+\alpha)=-1$$

$$\Leftrightarrow 4x+\alpha=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3.7. a) $1+\sin x-\cos x-\sin 2x+2\cos 2x=0.$ (1)

Ta có :

$$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2\ ;$$

$$2\cos 2x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\ =\ -2(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x).$$

Vậy

(1) $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x-\cos x-2\sin x-2\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1-\sin x-3\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x\\ 3\cos x+\sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{10}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\alpha\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

trong đó $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) $\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$. (2)

Điều kiện : $\sin x \neq 0$. Khi đó,

(2) $\Leftrightarrow (\sin x - \sin^2 x) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(1 - \sin x) + \dfrac{1 - \sin x}{\sin^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin^3 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = -1\end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

c) $\cos x \tan 3x = \sin 5x$. (3)

Điều kiện : $\cos 3x \neq 0$. Khi đó,

(3) $\Leftrightarrow \cos x \sin 3x = \cos 3x \sin 5x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) = \dfrac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 4x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x = 4x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 8x = \pi - 4x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$$x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \ \text{ và } \ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

d) $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$. (4)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$. Khi đó,

(4) $\Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + 3(\tan x + \cot x) + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow 2\left[(\tan x + \cot x)^2 - 2\right] + 3(\tan x + \cot x) + 2 = 0$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ta được phương trình

$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \Rightarrow t = -2,\ t = \dfrac{1}{2}$.

Với $t=-2$ ta có $\tan x+\cot x=-2$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x+1=0 \Rightarrow \tan x=-1$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Với $t=\frac{1}{2}$ ta có $\tan x+\cot x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 x-\tan x+2=0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài tập ôn chương I

1. a) Điều kiện : $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$ và $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq -1$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ và } x-\frac{\pi}{3}\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x\neq\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ và } x\neq\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right].$$

b) Điều kiện : $\cos x\neq 0$; $\sin x\neq 0$ và $\sin 2x\neq 1$

$$\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \text{ và } x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right].$$

2. a) $y=\sin^3 x-\tan x$ là hàm số lẻ.

b) $y=\dfrac{\cos x+\cot^2 x}{\sin x}$ là hàm số lẻ.

3. a) Hàm số $y=\sin x$ giảm trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ và tăng trên đoạn $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

b) $y = \sin x$ giảm trên $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$, tăng trên $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

c) $y = \sin x$ tăng trên $\left[-2\pi ; -\frac{3\pi}{2}\right]$, giảm trên $\left[-\frac{3\pi}{2} ; -\pi\right]$.

4. HD : a) $-1 \le 3 - 4\sin x \le 7$.

b) $1 \le 2 - \sqrt{\cos x} \le 2$.

5. a) Đồ thị của hàm số $y = \sin 2x + 1$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung lên phía trên một đơn vị.

b) Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang phải một đoạn bằng $\frac{\pi}{6}$.

6. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

7. $\cos 3x - \cos 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

8. $3\sin^2 x + 4\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -3\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (giá trị $\frac{2 + \sqrt{7}}{3} > 1$ nên bị loại).

9. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos 4x}{2} = \dfrac{1-\cos 6x}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin 4x \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin 2x - \sin 4x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x \cos 3x \sin x = 0.$

Đáp số : $x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

10. $2\tan x + 3\cot x = 4$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$. Ta có

$2\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$. Phương trình vô nghiệm đối với $\tan x$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

11. $2\cos^2 x - 3\sin 2x + \sin^2 x = 1$.

- $\cos x = 0$ thoả mãn phương trình $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$, tìm được $\tan x = \dfrac{1}{6}.$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \arctan\dfrac{1}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

12. HD : $2\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 3 \Rightarrow \tan^2 x - \tan x + 4 = 0.$
Phương trình vô nghiệm.

13. $3\sin x - 4\cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\sin x - \dfrac{4}{5}\cos x = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \dfrac{1}{5}$ (với $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \arcsin\dfrac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \alpha + \pi - \arcsin\dfrac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

14. $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 3\sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0.$

Đáp số : $x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

15. $2\tan^2 x - 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x - 3 = 0.$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) - 3(\tan x - \cot x) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan x - \cot x)^2 - 3(\tan x - \cot x) + 1 = 0.$$

Đặt $t = \tan x - \cot x$ ta được phương trình

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = \dfrac{1}{2}.$

Với $t = 1$ ta có $\tan x - \cot x = 1$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{1}{2}$ ta có $\tan x - \cot x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.



hương II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

§1. Quy tắc đếm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng

Giả sử đối tượng X có m cách chọn khác nhau, đối tượng Y có n cách chọn khác nhau và không có cách chọn đối tượng X nào trùng với mỗi cách chọn đối tượng Y. Khi đó có $m + n$ cách chọn một trong hai đối tượng ấy.

Giả sử A và B là các tập hữu hạn, không giao nhau. Khi đó

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \quad (1)$$

➤ **Chú ý.** Công thức (1) có thể mở rộng theo hai hướng :

a) Nếu A và B là hai tập hữu hạn bất kì thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (2)$$

b) Nếu $A_1, ..., A_m$ là các tập hữu hạn tuỳ ý, đôi một không giao nhau thì

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_m).$$

2. Quy tắc nhân

Giả sử A, B là hai tập hữu hạn. Kí hiệu $A \times B$ là tập hợp tất cả các cặp có thứ tự (a, b), trong đó $a \in A$, $b \in B$. Ta có quy tắc

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B). \quad (3)$$

Quy tắc trên có thể phát biểu như sau :

Giả sử có hai hành động được thực hiện liên tiếp. Hành động thứ nhất có m kết quả. Ứng với mỗi kết quả của hành động thứ nhất, hành động thứ hai có n kết quả. Khi đó có $m \times n$ kết quả của hai hành động liên tiếp đó.

➤ **Chú ý.** Quy tắc nhân ở trên có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Trong một lớp có 18 bạn nam, 12 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

a) Một bạn phụ trách quỹ lớp ?

b) Hai bạn, trong đó có một nam và một nữ ?

Giải

a) Theo quy tắc cộng, ta có $18 + 12 = 30$ cách chọn một bạn phụ trách quỹ lớp (hoặc nam hoặc nữ).

b) Muốn có hai bạn gồm một nam và một nữ, ta phải thực hiện hai hành động lựa chọn :

– Chọn một nam : Có 18 cách chọn ;

– Khi đã có một nam rồi, có 12 cách chọn một bạn nữ.

Vậy theo quy tắc nhân, ta có $18 \,.\, 12 = 216$ cách chọn một nam và một nữ.

• ***Ví dụ 2***

Trên giá sách có 10 quyển sách tiếng Việt khác nhau, 8 quyển tiếng Anh khác nhau và 6 quyển tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

a) Một quyển sách ?

b) Ba quyển sách tiếng khác nhau ?

c) Hai quyển sách tiếng khác nhau ?

Giải

a) Theo quy tắc cộng, có $10 + 8 + 6 = 24$ cách chọn một quyển sách.

b) Theo quy tắc nhân, có $10.8.6 = 480$ cách chọn ba quyển tiếng khác nhau.

c) Theo quy tắc nhân, có $10.8 = 80$ cách chọn một quyển tiếng Việt và một quyển tiếng Anh ; Có $10.6 = 60$ cách chọn một quyển tiếng Việt và một quyển tiếng Pháp ; Có $8.6 = 48$ cách chọn một quyển tiếng Anh và một quyển tiếng Pháp. Từ đó, theo quy tắc cộng, ta có số cách chọn hai quyển sách tiếng khác nhau là

$$80 + 60 + 48 = 188 \text{ (cách)}.$$

• *Ví dụ 3*

Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, có bao nhiêu cách chọn một số hoặc là số chẵn hoặc là số nguyên tố ?

Giải

Kí hiệu A là tập hợp các số chẵn (có 4 số) và B là tập hợp các số nguyên tố (có 4 số) trong tập số đã cho. Khi đó, số cách chọn cần tìm là $n(A \cup B)$. Nhưng có một số nguyên tố chẵn duy nhất là 2, tức $n(A \cap B) = 1$. Vậy theo (2),

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 1 = 7.$$

C. BÀI TẬP

1.1. Nam đến cửa hàng văn phòng phẩm để mua quà tặng bạn. Trong cửa hàng có ba mặt hàng : Bút, vở và thước, trong đó có 5 loại bút, 4 loại vở và 3 loại thước. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một món quà gồm một bút, một vở và một thước ?

1.2. Trong một đội văn nghệ có 8 bạn nam và 6 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đôi song ca nam – nữ ?

1.3. Có bao nhiêu số tự nhiên có tính chất :

a) Là số chẵn và có hai chữ số (không nhất thiết khác nhau) ;

b) Là số lẻ và có hai chữ số (không nhất thiết khác nhau) ;

c) Là số lẻ và có hai chữ số khác nhau ;

d) Là số chẵn và có hai chữ số khác nhau.

1.4. Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tính số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc để phát biểu ý kiến, sao cho

a) Hai người đó là vợ chồng ;

b) Hai người đó không là vợ chồng.

1.5. Số 360 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

1.6. Trong 100 000 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số chứa một chữ số 3, một chữ số 4 và một chữ số 5 ?

1.7. Giữa hai thành phố A và B có 5 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B rồi trở về A mà không có đường nào được đi hai lần ?

1.8. Có bao nhiêu số nguyên dương gồm không quá ba chữ số khác nhau ?

1.9. Một người vào cửa hàng ăn. Người đó muốn chọn thực đơn gồm một món ăn trong 10 món, một loại hoa quả tráng miệng trong 5 loại hoa quả và một loại nước uống trong 4 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn của bữa ăn ?

1.10. Một lớp có 40 học sinh, đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao : bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao ?

§2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

1. Kết quả của sự sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một *hoán vị* của tập hợp A.

Số các hoán vị của A được kí hiệu là P_n, ta có

$$P_n = n.(n-1)\ldots 2.1 = n!.$$

2. Kết quả của việc lấy k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) và xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp* chập k của n phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k, ta có

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(ở đây, quy ước $0! = 1$).

3. Một tập con gồm k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) được gọi là một *tổ hợp* chập k của n phần tử. Tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k, ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

> Có bao nhiêu cách xếp bốn bạn *A*, *B*, *C*, *D* vào bốn chiếc ghế kê thành hàng ngang ?

Giải

Mỗi cách xếp cho ta một hoán vị của bốn bạn và ngược lại. Vậy số cách xếp là

$$P_4 = 4! = 24 \text{ (cách)}.$$

• *Ví dụ 2*

> Có bao nhiêu số nguyên dương gồm năm chữ số khác không và khác nhau (đôi một) ?

Giải

Mỗi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$ và

$$a_i \in \{1, 2, ..., 9\}, i = 1, ..., 5.$$

Như vậy, có thể coi mỗi số dạng trên là một chỉnh hợp chập 5 của 9 (chữ số). Do đó, số các số cần tìm là

$$A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 9.8.7.6.5 = 15120 \text{ (số)}.$$

• *Ví dụ 3*

> Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau ?

Giải

Kết quả của sự phân công là một nhóm gồm ba bạn, tức là một tổ hợp chập 3 của 10 bạn. Vậy số cách phân công là

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 \text{ (cách)}.$$

• *Ví dụ 4*

> Trong mặt phẳng có 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau đồng thời cắt 6 đường thẳng đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên bởi 14 đường thẳng đã cho ?

Giải

Kí hiệu A và B lần lượt là tập hợp 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng song song cắt 6 đường thẳng đã cho.

Mỗi hình bình hành được tạo bởi hai đường thẳng của tập A và hai đường thẳng của tập B. Vậy số hình bình hành cần tìm là

$$C_6^2 \,.\, C_8^2 = 15.28 = 420 \text{ (hình).}$$

C. BÀI TẬP

2.1. Một cái khay tròn đựng bánh kẹo ngày Tết có 6 ngăn hình quạt màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó ?

2.2. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 10 ghế được kê thành hàng ngang, sao cho :

a) Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?

b) Các bạn nam ngồi liền nhau ?

2.3. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có An và Bình, vào 10 ghế kê thành hàng ngang, sao cho :

a) Hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau ?

b) Hai bạn An và Bình không ngồi cạnh nhau ?

2.4. Thầy giáo có ba quyển sách Toán khác nhau cho ba bạn mượn (mỗi bạn một quyển). Sang tuần sau thầy giáo thu lại và tiếp tục cho ba bạn mượn ba quyển đó. Hỏi có bao nhiêu cách cho mượn sách mà không bạn nào phải mượn quyển đã đọc ?

2.5. Bốn người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho :

a) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà ?

b) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông ?

2.6. Ba quả cầu được đặt vào ba cái hộp khác nhau (không nhất thiết hộp nào cũng có quả cầu). Hỏi có bao nhiêu cách đặt, nếu

a) Các quả cầu giống hệt nhau (không phân biệt) ?

b) Các quả cầu đôi một khác nhau ?

2.7. Có bao nhiêu cách chia 10 người thành

a) Hai nhóm, một nhóm 7 người, nhóm kia 3 người ?

b) Ba nhóm tương ứng gồm 5, 3, 2 người ?

2.8. Một giá sách bốn tầng xếp 40 quyển sách khác nhau, mỗi tầng xếp 10 quyển. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các quyển sách sao cho từ mỗi tầng có

a) Hai quyển sách ?

b) Tám quyển sách ?

2.9. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu một quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ?

2.10. Một đoàn đại biểu gồm bốn học sinh được chọn từ một tổ gồm 5 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong đó có ít nhất một nam và ít nhất một nữ ?

2.11. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của chúng thuộc tập hợp gồm 10 điểm nằm trên đường tròn ?

2.12. Một đa giác lồi 20 cạnh có bao nhiêu đường chéo ?

2.13. Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm 4 điểm phân biệt ?

2.14. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam ngồi vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu

a) Ghế sắp thành hàng ngang ?

b) Ghế sắp quanh một bàn tròn ?

2.15. Chứng minh rằng với $1 \le k < n$,

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

2.16. Sử dụng đồng nhất thức $k^2 = C_k^1 + 2C_k^2$ để chứng minh rằng

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^1 + 2\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.17. Một lớp có 50 học sinh. Cần phân công 4 bạn quét sân trường và 5 bạn xén cây.

a) Tính số cách phân công bằng hai phương pháp để rút ra đẳng thức

$$C_{50}^9 . C_9^4 = C_{50}^4 . C_{46}^5.$$

b) Chứng minh công thức Niu-tơn

$$C_n^r . C_r^k = C_n^k . C_{n-k}^{r-k} \qquad (n \ge r \ge k \ge 0).$$

2.18. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố thì với $r = 1, 2, ..., n - 1$, ta có C_n^r chia hết cho n.

2.19. Trong một đa giác đều bảy cạnh, kẻ các đường chéo. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo, trừ các đỉnh ?

2.20. Tìm số các số nguyên dương gồm năm chữ số sao cho mỗi chữ số của số đó lớn hơn chữ số ở bên phải nó.

§3. Nhị thức Niu-tơn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khi khai triển nhị thức $(a + b)^n$, ta nhận được công thức

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

(công thức Nhị thức Niu-tơn).

2. Trong vế phải của công thức (1) ta có :

a) Số các hạng tử là $n + 1$;

b) Số hạng (hạng tử) thứ $k + 1$ là $C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$, $k = 0, 1, ... n$ (quy ước $a^0 = 1$ với $a \neq 0$).

c) Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

d) Các hạng tử cách đều hạng tử đầu và hạng tử cuối có hệ số bằng nhau.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Khai triển $(x - a)^5$ thành tổng các đơn thức.

Giải

Theo công thức Nhị thức Niu-tơn ta có

$$(x - a)^5 = [x + (-a)]^5$$
$$= x^5 + 5x^4(-a) + 10x^3(-a)^2 + 10x^2(-a)^3 + 5x(-a)^4 + (-a)^5$$
$$= x^5 - 5x^4 a + 10x^3 a^2 - 10x^2 a^3 + 5xa^4 - a^5.$$

• *Ví dụ 2*

> Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$.

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$C_6^k (2x)^{6-k}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$= C_6^k 2^{6-k}(-1)^k x^{6-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $6 - 3k = 0$, nhận được $k = 2$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_6^2 2^{6-2}(-1)^2 = 240$.

C. BÀI TẬP

3.1. Tìm số hạng thứ năm trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$, mà trong khai triển đó số mũ của x giảm dần.

3.2. Viết khai triển của $(1 + x)^6$.

a) Dùng ba số hạng đầu để tính gần đúng $1{,}01^6$.

b) Dùng máy tính để kiểm tra kết quả trên.

3.3. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 + 3x)^n$ là 90. Hãy tìm n.

3.4. Trong khai triển của $(1 + ax)^n$ ta có số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $24x$, số hạng thứ ba là $252x^2$. Hãy tìm a và n.

3.5. Trong khai triển của $(x + a)^3(x - b)^6$, hệ số của x^7 là -9 và không có số hạng chứa x^8. Tìm a và b.

§4. Phép thử và biến cố

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tập hợp mọi kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu là Ω. Ta chỉ xét các phép thử với không gian mẫu Ω là tập hữu hạn.

Mỗi tập con A của Ω được gọi là *biến cố*. Tập $\varnothing$ được gọi là *biến cố không thể*, tập Ω được gọi là *biến cố chắc chắn*.

Nếu khi phép thử được tiến hành mà kết quả của nó là một phần tử của A thì ta nói rằng A xảy ra, hay phép thử là thuận lợi cho A.

Biến cố $\overline{A} = \Omega \setminus A$ được gọi là *biến cố đối* của A.

A và B đối nhau $\Leftrightarrow$ $A = \overline{B}$.

$\overline{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A hoặc B xảy ra.

Biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B cùng xảy ra.

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B được gọi là *hai biến cố xung khắc*.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất và quan sát số chấm xuất hiện.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : "Xuất hiện mặt chẵn chấm" ;

B : "Xuất hiện mặt lẻ chấm" ;

C : "Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3".

c) Trong các biến cố trên, hãy tìm các biến cố xung khắc.

Giải

a) Kí hiệu kết quả "Con súc sắc xuất hiện mặt k chấm" là k ($k = 1, 2, ..., 6$). Khi đó không gian mẫu là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Ta có $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 3, 5\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$.

c) Các biến cố A và B là xung khắc, vì $A \cap B = \varnothing$

• ***Ví dụ 2***

Từ một hộp chứa 3 bi trắng, 2 bi đỏ, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 bi.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố :

A : "Hai bi cùng màu trắng" ;

B : "Hai bi cùng màu đỏ" ;

C : "Hai bi cùng màu" ;

D : "Hai bi khác màu".

c) Trong các biến cố trên, hãy tìm các biến cố xung khắc, các biến cố đối nhau.

Giải

a) Các bi trắng được đánh số 1, 2, 3. Các bi đỏ được đánh số 4, 5. Khi đó không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 2 của 5 (số). Tức là

$\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.

b) Ta có

$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

$$B = \{\{4, 5\}\}, C = A \cup B, D = \overline{C}.$$

c) Ta có $A \cap B = \varnothing$, $A \cap D = \varnothing$, $B \cap D = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$. Do đó A và B xung khắc ; D xung khắc với các biến cố A, B, C.

Vì $D = \overline{C}$ nên C và D là hai biến cố đối nhau.

C. BÀI TẬP

4.1. Gieo một đồng tiền ba lần và quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N).

a) Xây dựng không gian mẫu.

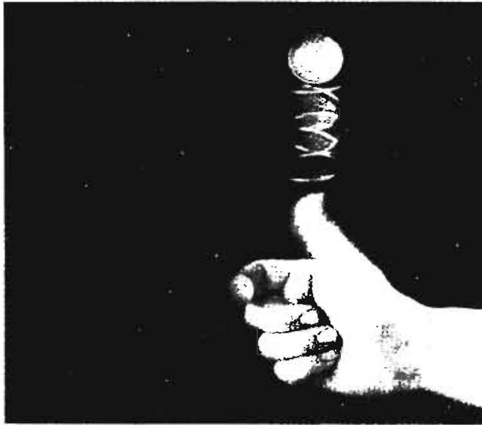
b) Xác định các biến cố :

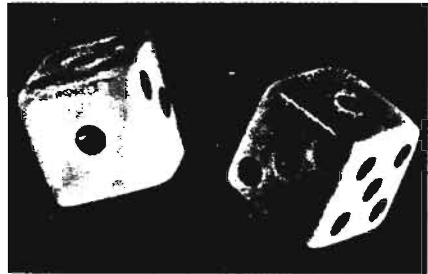
A : "Lần gieo đầu xuất hiện mặt sấp" ;

B : "Ba lần xuất hiện các mặt như nhau" ;

C : "Đúng hai lần xuất hiện mặt sấp" ;

D : "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp".





4.2. Gieo một đồng tiền, sau đó gieo một con súc sắc. Quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N) của đồng tiền và số chấm xuất hiện trên con súc sắc.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : "Đồng tiền xuất hiện mặt sấp và con súc sắc xuất hiện mặt chẵn chấm" ;

B : "Đồng tiền xuất hiện mặt ngửa và con súc sắc xuất hiện mặt lẻ chấm" ;

C : "Mặt 6 chấm xuất hiện".

4.3. Một con súc sắc được gieo ba lần. Quan sát số chấm xuất hiện.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : "Tổng số chấm trong ba lần gieo là 6" ;

B : "Số chấm trong lần gieo thứ nhất bằng tổng các số chấm của lần gieo thứ hai và thứ ba".

§5. Xác suất của biến cố

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nếu A là biến cố liên quan đến phép thử chỉ có một số hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện thì tỉ số $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ được gọi là *xác suất* của biến cố A. Xác suất có các tính chất sau :

a) $P(A) \geq 0, \forall A$;

b) $P(\Omega) = 1$;

c) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc cùng liên quan đến phép thử thì

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

(công thức cộng xác suất).

Mở rộng : Với hai biến cố A và B bất kì cùng liên quan đến phép thử thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập*, nếu sự xảy ra của một trong hai biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Người ta chứng minh được rằng, A và B độc lập khi và chỉ khi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ngoài ra, A và B độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và B độc lập $\Leftrightarrow$ A và $\overline{B}$ độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tìm xác suất để thẻ được lấy ghi số

a) Chẵn ;

b) Chia hết cho 3 ;

c) Lẻ và chia hết cho 3.

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, ..., 20\}$. Kí hiệu A, B, C là các biến cố tương ứng với câu a), b), c). Ta có :

a) $A = \{2, 4, 6, ..., 20\}$, $n(A) = 10$, $n(\Omega) = 20 \Rightarrow P(A) = \dfrac{10}{20} = 0{,}5$.

b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $P(B) = \dfrac{6}{20} = 0{,}3$.

c) $C = \{3, 9, 15\}$, $P(C) = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$.

• ***Ví dụ 2***

Một lớp có 60 sinh viên trong đó 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau

a) A : "Sinh viên được chọn học tiếng Anh" ;

b) B : "Sinh viên được chọn chỉ học tiếng Pháp" ;

c) C : "Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp" ;

d) D : "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và tiếng Pháp ".

Giải

Rõ ràng $P(A) = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$ và $P(A \cap B) = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3}$.

Từ đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$.

và $\qquad P(D) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$

Đó là xác suất chọn được sinh viên không học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp.

• ***Ví dụ 3***

Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

Giải

Kí hiệu A : "Lần đầu xuất hiện mặt chẵn chấm" ;

B : "Lần thứ hai xuất hiện mặt chẵn chấm ";

C : "Tổng số chấm trong hai lần gieo là chẵn".

Ta có $C = AB \cup \overline{A}\,\overline{B}$. Dễ thấy AB và $\overline{A}.\overline{B}$ xung khắc nên

$$P(C) = P(AB) + P(\overline{A}\,\overline{B}).$$

Vì A và B độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập, do đó

$$P(C) = P(A)P(B) + P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

C. BÀI TẬP

5.1. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên hai người. Tìm xác suất sao cho trong hai người đó :

a) Cả hai đều là nữ ;

b) Không có nữ nào ;

c) Ít nhất một người là nữ ;

d) Có đúng một người là nữ.

5.2. Một hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 20 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất sao cho quả được chọn :

a) Ghi số chẵn ;

b) Màu đỏ ;

c) Màu đỏ và ghi số chẵn ;

d) Màu xanh hoặc ghi số lẻ.

5.3. Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

5.4. Kết quả (b, c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình bậc hai

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Tính xác suất để

a) Phương trình vô nghiệm ;

b) Phương trình có nghiệm kép ;

c) Phương trình có nghiệm.

5.5. Một hộp chứa 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10, đồng thời các quả từ 1 đến 6 được sơn màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu A là biến cố : "Quả lấy ra màu đỏ", B là biến cố : "Quả lấy ra ghi số chẵn". Hỏi A và B có độc lập không ?

5.6. Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo hai lần. Tính xác suất sao cho

a) Tổng số chấm của hai lần gieo là 6.

b) Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt một chấm.

5.7. Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lí và 10% trượt cả Toán lẫn Lí. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho

a) Hai học sinh đó trượt Toán ;

b) Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó ;

c) Hai học sinh đó không bị trượt môn nào ;

d) Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn.

5.8. Cho A và B là hai biến cố độc lập với $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$. Tính

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

5.9. Từ một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con, lấy ngẫu nhiên lần lượt có hoàn lại từng con cho đến khi lần đầu tiên lấy được con át thì dừng. Tính xác suất sao cho

a) Quá trình lấy dừng lại ở lần thứ hai ;

b) Quá trình lấy dừng lại sau không quá hai lần.

Bài tập ôn chương II

1. Xếp ngẫu nhiên ba người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho

a) Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà ;

b) Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.

2. Cũng hỏi như bài 1 nhưng 6 ghế được xếp quanh bàn tròn.

3. Có bao nhiêu cách xếp 7 người vào hai dãy ghế sao cho dãy ghế đầu có 4 người và dãy sau có 3 người.

4. Chứng minh rằng :

a) $C_{n-1}^{m-1} = \frac{m}{n} C_n^m$, $(1 \le m \le n)$;

b) $C_{m+n}^m = C_{m+n-1}^m + C_{m+n-1}^n$, $(1 \le m, n)$.

5. Tính xác suất sao cho trong 13 con bài tú lơ khơ được chia ngẫu nhiên cho bạn Bình có 4 con *pích*, 3 con *rô*, 3 con *cơ* và 3 con *nhép*.

6. Giả sử A và B là hai biến cố và $\frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} = a$. Chứng minh rằng

a) $\frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B)} = 1 - a$; b) $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

7. Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho

a) Cả hai quả đều đỏ ;

b) Hai quả cùng màu ;

c) Hai quả khác màu.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG II

§1.

1.1. Theo quy tắc nhân, có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách chọn.

1.2. Áp dụng quy tắc nhân, có

$$8 \times 6 = 48 \text{ cách chọn.}$$

1.3. a) Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị là số chẵn.

Có 9 cách chọn chữ số hàng chục.

Theo quy tắc nhân, có $5 \times 9 = 45$ số chẵn gồm hai chữ số.

b) Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị là số lẻ.

Có 9 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có $5 \times 9 = 45$ số lẻ gồm hai chữ số (có thể giống nhau).

c) Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị là số lẻ ;

Có 8 cách chọn chữ số hàng chục mà khác chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $5 \times 8 = 40$ số lẻ gồm hai chữ số khác nhau.

d) Số các số chẵn có hai chữ số, tận cùng bằng 0 là 9.

Để tạo nên số chẵn không chẵn chục, ta chọn chữ số hàng đơn vị khác 0. Có 4 cách chọn. Tiếp theo chọn chữ số hàng chục. Có 8 cách chọn. Vậy theo quy tắc cộng và quy tắc nhân, ta có

$$9 + 8 \times 4 = 41$$

số chẵn gồm hai chữ số khác nhau.

1.4. a) Có 10 cách chọn người đàn ông. Khi đã chọn người đàn ông rồi, chỉ có 1 cách chọn người đàn bà là vợ của người đàn ông đó. Vậy có 10 cách.

b) Có 10 cách chọn người đàn ông. Khi đã chọn người đàn ông rồi, có 9 cách chọn người đàn bà không là vợ của người đàn ông đó. Vậy có $10 \times 9 = 90$ cách chọn.

1.5. Phân tích số 360 thành tích các thừa số nguyên tố $360 = 2^3 . 3^2 . 5$. Số d là ước của 360 phải có dạng $d = 2^m . 3^n . 5^p$ với $0 \le m \le 3, 0 \le n \le 2, 0 \le p \le 1$. Vậy theo quy tắc nhân, ta có $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ ước nguyên dương của 360.

1.6. Nếu viết 00345 thì ta hiểu đó là số có ba chữ số 345. Với quy ước như vậy ta lí luận như sau : Từ dãy hình thức ***** ta lần lượt thay dấu * bởi các chữ số. Chữ số 3 có 5 cách đặt, khi đã đặt số 3, có 4 cách đặt số 4, có 3 cách đặt số 5. Khi đã đặt xong các số 3, 4, 5 rồi còn hai chỗ nữa. Ta có 7 cách đặt một trong 7 số còn lại vào chỗ dấu * đầu tiên tính từ bên trái và 7 cách đặt chữ số vào dấu * còn lại. Vậy theo quy tắc nhân, có 5 . 4 . 3 . 7 . 7 = 2940 số nguyên dương không vượt quá 100000 mà chứa một chữ số 3, một chữ số 4 và một chữ số 5.

1.7. Có 5 cách đi từ A đến B. Đến B rồi, có 4 cách trở về A mà không đi qua con đường đã đi từ A đến B. Vậy có 5 . 4 = 20 cách đi từ A đến B rồi trở về A mà không đường nào đi hai lần.

1.8. Có 9 số nguyên dương gồm một chữ số ;

Có 9.9 số nguyên dương gồm hai chữ số khác nhau ;

Có 9.9.8 số nguyên dương gồm ba chữ số khác nhau.

Vậy số các số cần tìm là

$$9 + 9.9 + 9.9.8 = 738.$$

1.9. Theo quy tắc nhân có 10.5.4 = 200 cách chọn.

1.10. Kí hiệu A và B lần lượt là tập các học sinh đăng kí môn bóng đá và cầu lông. Ta có $A \cup B = 40$. Theo quy tắc cộng mở rộng ta có

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 30 + 25 - 40 = 15.$$

Vậy có 15 em đăng kí chơi hai môn thể thao.

§2.

2.1. Có 6! = 720 cách bày bánh kẹo.

2.2. Để xác định, các ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 10 tính từ trái sang phải.

a) Nếu các bạn nam ngồi ở các ghế ghi số lẻ thì các bạn nữ ngồi ở các ghế còn lại. Có 5! cách xếp bạn nam, 5! cách xếp bạn nữ. Tất cả có $(5!)^2$ cách xếp.

Nếu các bạn nam ngồi ở các ghế ghi số chẵn, các bạn nữ ngồi ở các ghế còn lại thì có $(5!)^2$ cách xếp nam và nữ. Vậy có tất cả 2 . $(5!)^2$ cách xếp nam nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Các bạn nam được bố trí ngồi ở các ghế từ k đến k + 4, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Trong mỗi trường hợp có $(5!)^2$ cách xếp nam và nữ. Vậy có $6.(5!)^2$ cách xếp mà các bạn nam ngồi cạnh nhau.

2.3. a) Có 2 . 9 = 18 cách xếp chỗ cho An và Bình ngồi cạnh nhau, 8 bạn kia được xếp vào 8 chỗ còn lại. Vậy có 8! cách xếp 8 bạn còn lại và do đó có 18.8! cách xếp sao cho An, Bình ngồi cạnh nhau.

b) Có 10! cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn. Từ đó có 10! – 18.8! = 72.8! cách xếp chỗ cho 10 bạn mà An và Bình không ngồi cạnh nhau.

2.4. Để xác định, ba bạn được đánh số 1, 2, 3. Kí hiệu A_i là tập hợp các cách cho mượn mà bạn thứ i được thầy giáo cho mượn lại cuốn đã đọc lần trước ($i = 1, 2, 3$). Kí hiệu X là tập hợp các cách cho mượn lại. Theo bài ra cần tính

$$n\,[X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)].$$

Ta có $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) -$

$$- n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= 2! + 2! + 2! - 1 - 1 - 1 + 1 = 4,$$

$$n(X) = 3! = 6.$$

Từ đó $\quad n[X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)] = 6 - 4 = 2.$

2.5. a) Xếp hai người đàn bà ngồi cạnh nhau. Có 2 cách. Sau đó xếp đứa trẻ ngồi vào giữa. Có 1 cách. Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại. Có 4! cách. Theo quy tắc nhân, có 2 . 4! = 48 cách.

b) Đầu tiên chọn hai người đàn ông. Có C_4^2 cách. Xếp hai người đó ngồi cạnh nhau. Có 2 cách. Sau đó xếp đứa trẻ vào giữa. Có 1 cách. Xếp 4 người còn lại vào 4 ghế còn lại. Có 4! cách. Vậy theo quy tắc nhân, có $C_4^2.2.4! = 288$ cách.

2.6. a) Trong trường hợp này, số cách đặt bằng số các nghiệm (x_1, x_2, x_3) nguyên, không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Từ đó, đáp số cần tìm là $C_5^2 = 10$.

b) Quả thứ nhất có 3 cách đặt ;

Quả thứ hai có 3 cách đặt ;

Quả thứ ba có 3 cách đặt.

Vậy số cách đặt là $3^3 = 27$.

2.7. a) Chọn 7 người từ 10 người để lập một nhóm, ba người còn lại vào nhóm khác. Vậy số cách chia là C_{10}^{7}.

b) Tương tự, kết quả là $C_{10}^{5}.C_{5}^{3}$.

2.8. a) Có C_{10}^{2} cách chọn hai quyển từ tầng thứ k, $k = 1, 2, 3, 4$. Vậy có tất cả $(C_{10}^{2})^4$ cách chọn.

b) Tương tự, có $(C_{10}^{8})^4 = (C_{10}^{2})^4$ cách chọn.

2.9. Đầu tiên coi các quả là khác nhau. Do vậy có 9! cách chia. Nhưng các quả cùng loại (táo, cam, chuối) là giống nhau, nên nếu các cháu có cùng loại quả đổi cho nhau thì vẫn chỉ là một cách chia. Vì vậy, số cách chia là $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

Có thể giải theo cách khác như sau :

Chọn 4 trong 9 cháu để phát táo. Có C_9^4 cách. Chọn 3 trong 5 cháu còn lại để phát cam. Có C_5^3 cách. Chuối sẽ phát cho hai cháu còn lại. Vậy có $C_9^4.C_5^3 = 1260$ cách.

2.10. Kí hiệu X là tập hợp các đoàn đại biểu, A, B lần lượt là tập các đoàn đại biểu gồm toàn nam và toàn nữ. Theo bài ra, cần tìm

$$n\,[X \setminus (A \cup B)] = n(X) - n(A \cup B) = n(X) - n(A) - n(B)$$

Ta có $n(X) = C_9^4,\ n(A) = C_5^4,\ n(B) = C_4^4$.

Vậy $n[X \setminus (A \cup B)] = C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120$.

2.11. Cứ ba điểm dựng được một tam giác. Vì vậy có thể dựng được $C_{10}^{3} = 120$ tam giác.

2.12. Số đoạn nối hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{20}^{2}, số cạnh của đa giác là 20. Vậy số đường chéo là $C_{20}^{2} - 20 = 170$.

2.13. Số tập con của tập hợp gồm bốn điểm là

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16.$$

2.14. a) Xếp 6 nam vào 6 ghế cạnh nhau. Có 6! cách. Giữa các bạn nam có 5 khoảng trống cùng hai đầu dãy, nên có 7 chỗ có thể đặt ghế cho nữ. Bây giờ chọn 4 trong 7 vị trí để đặt ghế. Có C_7^4 cách. Xếp nữ vào 4 ghế đó. Có 4! cách. Vậy có 6!. C_7^4 . 4! = 120.7! cách xếp mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau..

b) Xếp 6 ghế quanh bàn tròn rồi xếp nam vào ngồi. Có 5! cách. Giữa hai nam có khoảng trống. Xếp 4 nữ vào 4 trong 6 khoảng trống đó. Có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân, có 5! A_6^4 = 43200 cách.

2.15. Ta có

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$$

...

$$C_{k+2}^{k+1} = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}$$

Từ đó $$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}$$

$$= C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

2.16. Ta có $A = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^1 + 2\sum_{k=2}^{n} C_k^2$. Kết hợp với bài tập 2.15, ta được

$$A = C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.17. a) *Cách thứ nhất*. Chọn 9 bạn trong 50 bạn để làm trực nhật. Có C_{50}^9 cách.

Khi đã chọn được 9 bạn rồi, chọn 4 trong 9 bạn đó để quét sân. Có C_9^4 cách .

Từ đó, theo quy tắc nhân, có $C_{50}^9 . C_9^4$ cách phân công.

Cách thứ hai. Chọn 4 trong 50 bạn để quét sân, sau đó chọn 5 trong 46 bạn còn lại để xén cây. Vậy có $C_{50}^4 . C_{46}^5$ cách phân công.

Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh.

b) Lập luận tương tự.

2.18. Có thể chứng minh dễ dàng đẳng thức sau

$$rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1} \qquad (r = 1, 2, ..., n - 1).$$

Vì n là số nguyên tố và $r < n$, nên n là ước của C_n^r.

2.19. Mỗi giao điểm của hai đường chéo ứng với một và chỉ một tập hợp gồm 4 điểm từ tập hợp 7 đỉnh của đa giác. Vậy có $C_7^4 = 35$ giao điểm.

2.20. Có C_{10}^5 cách chọn 5 chữ số khác nhau để lập số cần thiết. Nhưng khi đã có 5 chữ số khác nhau rồi, chỉ có một cách xếp 5 chữ số đó để tạo nên số cần thiết. Vậy có $C_{10}^5 = 252$ số.

§3.

3.1. Số hạng thứ $k + 1$ trong khai triển là

$$t_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k.$$

Vậy $t_5 = C_{10}^4 x^{10-4}.\left(\frac{2}{x}\right)^4 = 210.x^6 \times \frac{16}{x^4} = 3360x^2.$

Đáp số : $t_5 = 3360x^2$.

3.2. $(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$

a) $1{,}01^6 = (1 + 0{,}01)^6 \approx 1 + 6 \times 0{,}01 + 15 \times (0{,}01)^2 = 1{,}0615.$

b) Dùng máy tính ta nhận được

$$1{,}01^6 \approx 1{,}061520151.$$

3.3. Số hạng thứ $k + 1$ của khai triển là

$t_{k+1} = C_n^k(3x)^k$. Vậy số hạng chứa x^2 là $t_3 = C_n^2 9.x^2$. Theo bài ra ta có

$9.C_n^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow n = 5.$

3.4. Ta có $(1+ax)^n = 1 + C_n^1 ax + C_n^2 a^2 x^2 + \ldots$

Theo bài ra

$$\begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^2 a^2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)a^2}{2} = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = 24 \\ (n-1)a = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ n = 8. \end{cases}$$

3.5. Số hạng chứa x^7 là $\left(C_3^0.C_6^2(-b)^2 + C_3^1 a.C_6^1(-b) + C_3^2 a^2 C_6^0\right)x^7.$

Số hạng chứa x^8 là $\left(C_3^0.C_6^1(-b) + C_3^1 a.C_6^0\right)x^8$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} 15b^2 - 18ab + 3a^2 = -9 \\ -6b + 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

§4.

4.1. a) Không gian mẫu có dạng

$\Omega = \{SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN\}$.

b) $A = \{SSS, SNS, SSN, SNN\}$;

$B = \{SSS, NNN\}$;

$C = \{SSN, SNS, NSS\}$;

$D = \overline{\{NNN\}} = \Omega \setminus \{NNN\}$.

4.2. a) $\Omega = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6, N1, N2, N3, N4, N5, N6\}$.

b) $A = \{S2, S4, S6\}$;

$B = \{N1, N3, N5\}$;

$C = \{S6, N6\}$.

4.3. a) $\Omega = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 6\}$, gồm các chỉnh hợp chập 3 của 6 (số chấm).

b) $A = \{(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)\}$;

$B = \{(2, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (5, 1, 4), (5, 4, 1), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (6, 1, 5), (6, 5, 1), (6, 2, 4), (6, 4, 2), (6, 3, 3)\}$.

§5.

5.1. Số cách chọn là C_{10}^2. Kí hiệu A_k là biến cố : " Trong hai người đã chọn, có đúng k nữ ", $k = 0, 1, 2$.

a) Cần tính $P(A_2)$. Ta có $P(A_2) = \dfrac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$;

b) Tương tự, $P(A_0) = \dfrac{C_7^2}{C_{10}^2} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

c) $$P(\overline{A_0}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

d) $$P(A_1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

5.2. Rõ ràng trong hộp có 30 quả với 15 quả ghi số chẵn; 10 quả màu đỏ, 5 quả màu đỏ ghi số chẵn, 25 quả màu xanh hoặc ghi số lẻ. Vậy theo định nghĩa

a) $P(A) = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$;

b) $P(B) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$;

c) $P(C) = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$;

d) $P(D) = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6}$;

trong đó A, B, C, D là các biến cố tương ứng với các câu a), b), c), d).

5.3. Số cách xếp quanh bàn tròn là $n(\Omega) = 9!$.

Kí hiệu A là biến cố : "Nam nữ ngồi xen kẽ nhau".

Ta có $n(A) = 4!\,5!$ và $P(A) = \dfrac{4!5!}{9!} \approx 0{,}008$.

5.4. Không gian mẫu $\Omega = \{(b, c) : 1 \leq b, c \leq 6\}$. Kí hiệu A, B, C là các biến cố cần tìm xác suất ứng với các câu a), b), c). Ta có $\Delta = b^2 - 4c$.

a) $A = \{(b, c) \in \Omega \mid b^2 - 4c < 0\}$

$= \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 2), ... (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$.

$n(A) = 6 + 5 + 4 + 2 = 17$, $\quad P(A) = \dfrac{17}{36}$.

b) $B = \{(b, c) \in \Omega \mid b^2 - 4c = 0\}$

$= \{(2, 1), (4, 4)\}$.

Từ đó $P(B) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

c) $C = \overline{A}$. Vậy $P(C) = 1 - \dfrac{17}{36} = \dfrac{19}{36}$.

5.5. Kí hiệu A là biến cố : "Quả lấy ra màu đỏ" ;

B là biến cố "Quả lấy ra ghi số chẵn".

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$;

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Từ đó $\qquad P(A) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

Tiếp theo, $\quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ và $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. Do đó

$$P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},\ P(AB) = \frac{3}{10}.$$

Ta thấy $P(AB) = \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = P(A)P(B)$, vậy A và B độc lập.

5.6. Rõ ràng $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$.

Kí hiệu A_1 : "Lần đầu xuất hiện mặt 1 chấm" ;

B_1 : "Lần thứ hai xuất hiện mặt 1 chấm" ;

C : "Tổng số chấm là 6" ;

D : "Mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần" ;

a) Ta có $C = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$, $P(C) = \dfrac{5}{36}$.

b) Ta có A_1, B_1 độc lập và $D = A_1 \cup B_1$ nên

$$P(D) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1B_1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

5.7. Kí hiệu A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố : "Học sinh được chọn từ khối *I* trượt Toán, Lí, Hoá" ; B_1, B_2, B_3 lần lượt là các biến cố : "Học sinh được chọn từ khối *II* trượt Toán, Lí, Hoá". Rõ ràng với mọi (i, j), các biến cố A_i và B_j độc lập.

a) Cần tính $P(A_1B_1)$. Ta có $P(A_1B_1) = P(A_1)P(B_1) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.

b) Xác suất cần tính là $P\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)\big)$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3).P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

c) Đặt $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Cần tính $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập, ta có $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = [1 - P(A)]^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

d) Cần tính $P(A \cup B)$.

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

5.8. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$$= 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}72.$$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$.

5.9. Kí hiệu A_k : "Lần thứ k lấy được con át", $k \geq 1$. Rõ ràng A_1, A_2 độc lập.

a) Ta cần tính $P(\overline{A}_1 \cap A_2)$. Ta có $P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2) = \dfrac{48}{52} \cdot \dfrac{4}{52}$.

b) Theo bài ra cần tính

$$P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{52} \approx 0,15.$$

Bài tập ôn chương II

1. Không gian mẫu gồm các hoán vị của 6 người. Vậy $n(\Omega) = 6!$.

Kí hiệu A là biến cố : "Đứa bé được xếp giữa hai người đàn bà" ;

B là biến cố : "Đứa bé được xếp giữa hai người đàn ông".

a) Để tạo nên một cách xếp mà đứa bé được xếp giữa hai người đàn bà, ta tiến hành như sau :

– Xếp đứa bé ngồi vào ghế thứ hai đến ghế thứ năm. Có 4 cách.

– Ứng với mỗi cách xếp đứa bé, có 2 cách xếp hai người đàn bà.

– Khi đã xếp hai người đàn bà và đứa bé, xếp ba người đàn ông vào các chỗ còn lại. Có 3! cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $n(A) = 4.2.3! = 48$.

Từ đó $$P(A) = \frac{48}{6!} = \frac{1}{15}.$$

b) Để tạo nên một cách xếp mà đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta tiến hành như sau :

– Xếp đứa bé vào các ghế thứ hai đến thứ năm. Có 4 cách.

– Chọn hai trong số ba người đàn ông. Có $C_3^2 = 3$ cách.

– Xếp hai người đàn ông ngồi hai bên đứa bé. Có 2 cách.

– Xếp ba người còn lại vào ba chỗ còn lại. Có 3! cách. Theo quy tắc nhân, ta có

$$n(B) = 4 \,.\, C_3^2 \,.\, 2 \,.\, 3! = 144.$$

Vậy $$P(B) = \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}.$$

2. Số cách xếp 6 người quanh bàn tròn là 5!. Vậy không gian mẫu có 5! = 120 phần tử.

a) Tính $n(A)$:

– Có 1 cách xếp đứa bé ;

– Có 2 cách xếp hai người đàn bà ngồi hai bên đứa bé ;

– Có 3! cách xếp ba người đàn ông.

Vậy $n(A) = 2 \,.\, 3! = 12.$

Từ đó $P(A) = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}.$

b) Tương tự

$$n(B) = 1 \,.\, C_3^2 \,.\, 2 \,.\, 3! = 36.$$

$$P(B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

3. Chọn 4 người để xếp vào 4 ghế ở dãy đầu : có A_7^4 cách. Còn lại 3 người xếp vào 3 ghế ở dãy sau : có 3! cách.

Vậy có tất cả $A_7^4.3! = 5040$ cách xếp.

4. HD. Dùng công thức tính số tổ hợp.

5. Số cách rút ra 13 con bài là C_{52}^{13}. Như vậy $n(\Omega) = C_{52}^{13}$.

Kí hiệu A : "Trong 13 con bài có 4 con pích, 3 con rô, 3 con cơ và 3 con nhép".

Ta có $n(A) = C_{13}^4.C_9^3.C_6^3 = \dfrac{13!}{4!(3!)^3}\cdot$

Vậy $P(A) = \dfrac{13!}{4!(3!)^3.C_{52}^{13}} \approx 0{,}000\,002.$

6. a) Vì $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ nên

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} = 1 - a.$$

b) Vì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

nên $$a = \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} \leq 1. \quad (1)$$

Mặt khác, $2P(A \cup B) = P(A \cup B) + P(A \cup B) \geq P(A) + P(B)$.

Vậy $$a = \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} \geq \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với (1), ta có $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

7. Kí hiệu A : "Quả lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ" ;

B : "Quả lấy từ hộp thứ hai màu đỏ".

Ta thấy A và B độc lập.

a) Cần tính $P(A \cap B)$. Ta có $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{3}{5}.\frac{4}{10} = 0{,}24$.

b) Cần tính xác suất của $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Do tính xung khắc và độc lập của các biến cố, ta có

$$P(C) = P(A)\,P(B) + P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{4}{10} + \frac{2}{5}.\frac{6}{10} = 0{,}48.$$

c) Cần tính $P(\overline{C})$. Ta có $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$.



hương III. DÃY SỐ CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp toán học

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta tiến hành hai bước :

Bước 1 : Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2 : Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq 1$) (ta gọi là giả thiết quy nạp) và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

2. Trong trường hợp phải chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì :

- Ở bước 1, ta kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
- Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq p$) và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

3. Phép thử với một số hữu hạn số tự nhiên, tuy không phải là chứng minh, nhưng cho phép ta dự đoán được kết quả. Kết quả này chỉ là giả thiết, và để chứng minh ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Chứng minh rằng

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n - 1) = n^2(n + 1) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1)$$

Giải

Bước 1 : Với $n = 1$, vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $1^2(1 + 1) = 2$.
Hệ thức (1) đúng.

Bước 2 : Đặt vế trái bằng S_n.

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$$S_k = 1.2 + 2.5 + ... + k(3k - 1) = k^2(k + 1) \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là :

$$S_{k+1} = (k + 1)^2 (k + 2).$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k + 1) [3(k + 1) - 1] = k^2(k + 1) + (k + 1) (3k + 2)$$

$$= (k + 1) (k^2 + 3k + 2) = (k + 1)^2 (k + 2).$$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• *Ví dụ 2*

Chứng minh rằng

$$n^7 - n \text{ chia hết cho 7 với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải

Đặt $A_n = n^7 - n$.

Khi $n = 1$ thì $A_1 = 0$, chia hết cho 7.

Giả sử đã có

$$A_k = (k^7 - k) \vdots 7 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 7$, tức là $(k + 1)^7 - (k + 1) \vdots 7$.

Thật vậy, áp dụng công thức Nhị thức Niu-tơn ta có

$$A_{k+1} = (k + 1)^7 - (k + 1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$

$$= k^7 - k + 7 (k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k).$$

Theo giả thiết quy nạp thì $A_k = k^7 - k$ chia hết cho 7, do đó

$$A_{k+1} \vdots 7.$$

Vậy $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Giải

Đặt vế trái của hệ thức (3) bằng C_n.

Khi $n = 1$, vế trái bằng $\sqrt{2}$, vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$; hệ thức (3) đúng.

Giả sử hệ thức (3) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$C_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Ta phải chứng minh

$$C_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$C_{k+1} = \sqrt{2 + C_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ (vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}} > 0).$$

Vậy hệ thức (3) đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 4***

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ ta có

$$3^n > n^2 + 4n + 5. \qquad (4)$$

Giải

Với $n = 3$, vế trái bằng 27, còn vế phải bằng 26.

Bất đẳng thức (4) đúng.

Giả sử bất đẳng thức (4) đúng với $n = k \geq 3$, tức là

$$3^k > k^2 + 4k + 5. \qquad (4')$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Thật vậy, nhân hai vế của bất đẳng thức (4') với 3 ta có

$$3^{k+1} > 3k^2 + 12k + 15 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5.$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0$ nên

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Bất đẳng thức (4) đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 5***

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \qquad (5)$$

trong đó a, b là các số dương và $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Trước hết nhận xét rằng nếu $a = b$ thì bất đẳng thức (5) xảy ra dấu bằng (=) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử $a \neq b$.

Nếu $n = 1$ thì bất đẳng thức (5) đúng và dấu bằng (=) xảy ra.

Ta sẽ chứng minh với $n \geq 2$ thì bất đẳng thức (5) đúng, bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy :

Với $n = 2$ thì (5) có dạng $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ hay $(a-b)^2 \geq 0$.

Rõ ràng bất đẳng thức này đúng và dấu bằng không xảy ra.

Giả sử bất đẳng thức (5) đúng với $a \neq b$ và $n = k \geq 2$, tức là

$$\frac{a^k + b^k}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^k.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $a + b > 0$, ta có

$$\frac{a^k + b^k}{2}.(a+b) > \frac{(a+b)^{k+1}}{2^k}$$

hay $$\frac{a^{k+1} + a^k b + ab^k + b^{k+1}}{2} > \frac{(a+b)^{k+1}}{2^k}. \qquad (5')$$

Vì $$a^{k+1} + b^{k+1} - (a^k b + ab^k) = a^k(a-b) - b^k(a-b)$$
$$= (a-b)(a^k - b^k) > 0$$

nên $$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k. \qquad (5'')$$

Từ (5') và (5") suy ra

$$\frac{(a^{k+1} + b^{k+1}) + (a^{k+1} + b^{k+1})}{2} > \frac{(a+b)^{k+1}}{2^k}$$

hay $$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1};$$

nghĩa là bất đẳng thức (5) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, bất đẳng thức đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 6***

> Với giá trị nào của số nguyên dương n, ta có
>
> $$2^{n+1} > n^2 + 3n \,? \qquad (6)$$

Giải

Thực chất đây là bài toán giải bất phương trình trên tập hợp ℕ*. Tuy nhiên, khó có thể giải nó bằng cách thông thường.

Đặt vế trái bằng A_n và vế phải bằng B_n.

Bằng phép thử với $n = 1, 2, 3$, dễ dàng thấy rằng

$$A_1 < B_1 \,;\, A_2 < B_2 \,;\, A_3 < B_3.$$

Đến đây, nếu vội kết luận bất phương trình (6) vô nghiệm thì sẽ là sai lầm, vì chỉ cần thử với $n = 4$ ta có $A_4 = 32 > 28 = B_4$. Thử tiếp với $n = 5, 6$ ta cũng có $A_5 > B_5$, $A_6 > B_6$. Đến đây ta có thể dự đoán : Với mọi số tự nhiên $n \geq 4$ ta có $2^{n+1} > n^2 + 3n$. Ta sẽ chứng minh điều dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức (6) đúng với $n = k \geq 4$, tức là

$$2^{k+1} > k^2 + 3k. \quad (6')$$

Nhân hai vế của (6') với 2 ta được

$$2^{k+2} > 2k^2 + 6k = (k+1)^2 + 3(k+1) + k^2 + k - 4.$$

Vì $k \geq 4$ nên $k^2 + k - 4 > 0$, do đó

$$2^{k+2} = 2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)\ ;$$

tức là (6) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, với $n \geq 4$ thì $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

• ***Ví dụ 7***

Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) Ta có $S_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$S_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5.7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$S_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7.9} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}.$$

b) Từ kết quả ở câu a) ta dự đoán

$$S_n = \frac{n}{2n+1}. \quad (7)$$

Ta sẽ chứng minh công thức (7) bằng phương pháp quy nạp.

• Với $n = 1$, theo a) thì (7) là đúng.

• Giả sử công thức (7) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$S_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]} = S_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

tức là (7) cũng đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức (7) đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 8***

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC vuông tại A, có số đo các cạnh là a, b, c thì với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có bất đẳng thức

$$b^n + c^n \leq a^n. \qquad (8)$$

Giải

• Với $n = 2$ thì theo định lý Py-ta-go ta có $b^2 + c^2 = a^2$.

Vậy bất đẳng thức (8) đúng.

• Giả sử bất đẳng thức (8) đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$b^k + c^k \leq a^k. \qquad (8')$$

Khi đó $b^{k+1} + c^{k+1} = b^k.b + c^k.c \leq b^k a + c^k a = (b^k + c^k)a$.

Sử dụng giả thiết quy nạp (8'), ta có

$b^{k+1} + c^{k+1} \leq a^{k+1}$, tức là (8) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, bất đẳng thức (8) đã được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n = 2$.

Nhận xét

1. Các ví dụ nêu trên thể hiện rõ hai bước của phương pháp quy nạp :

Bước 1 : Kiểm tra mệnh đề (điều cần chứng minh) đúng với $n = 1$ (hoặc với $n = p$, p là số tự nhiên).

Bước 2 : Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$.

Sau đó, phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Lưu ý rằng phải thực hiện đầy đủ cả hai bước, xong bước 1 mới làm bước 2.

Đặc biệt, ở bước 2 phải đặt ra được bài toán, trong đó :

Giả thiết (quy nạp) là mệnh đề đúng với $n = k$ và kết luận là mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Hoàn thành xong hai bước phải nêu kết luận cuối cùng.

2. Phương pháp quy nạp có thể dùng để giải các loại bài toán sau :

Loại 1 : Chứng minh một kết luận cho sẵn (xem các Ví dụ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8).

Loại 2 : Tìm điều kiện để một kết luận là đúng, bằng cách sử dụng phép quy nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả, sau đó mới chứng minh bằng phương pháp quy nạp. (Xem Ví dụ 6).

C. BÀI TẬP

1.1. Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$;

b) $3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n = \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$.

1.2. Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.3. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133 ;

b) $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

1.4. Chứng minh các bất đẳng thức sau ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2^{n+2} > 2n + 5$;

b) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$;

1.5. Với giá trị nào của số tự nhiên n ta có

a) $2^n > 2n + 1$;

b) $2^n > n^2 + 4n + 5$;

c) $3^n > 2^n + 7n$?

1.6. Cho tổng

$$S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$$

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4 ;

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

1.7. Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thoả mãn điều kiện

$$-1 < a_i \leq 0 \text{ với } i = \overline{1, n}.$$

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

1.8. Chứng minh rằng với các số thực $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

§2. Dãy số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

a) Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số)

$$u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi nó là *số hạng tổng quát* của dãy số (u_n).

b) Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$, được gọi là *dãy số hữu hạn*.

2. Cách cho một dãy số

a) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Khi đó $u_n = f(n)$, trong đó f là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$.

Đây là cách khá thông dụng (giống như hàm số) và nếu biết giá trị của n (hay cũng chính là số thứ tự của số hạng) thì ta có thể tính ngay được u_n.

b) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Tuy nhiên, không thể tìm ngay được u_n với n tuỳ ý.

c) Dãy số cho bằng công thức truy hồi (hay quy nạp)

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Với $n \geq 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó). Các công thức có thể là :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ với } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \text{ với } n \geq 3. \end{cases}$$

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là *tăng* nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
- Dãy số (u_n) được gọi là *giảm* nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Phương pháp khảo sát tính đơn điệu

Phương pháp 1 : Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.

– Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng ;

– Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.

Phương pháp 2

Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, rồi so sánh với 1.

– Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng ;

– Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số được gọi là *bị chặn*, nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

➤**Lưu ý** : Các dấu "=" nêu trên không nhất thiết phải xảy ra.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Các dãy số (u_n) được cho bởi các công thức :

a) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Hãy viết sáu số hạng đầu của mỗi dãy số. Khảo sát tính tăng, giảm của chúng. Tìm số hạng tổng quát của các dãy c) và d).

Giải

a) Sáu số hạng đầu : $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{31}{33}, \dfrac{63}{65}$.

Dự đoán dãy số tăng.

Ta sẽ chứng minh dự đoán đó. Thật vậy, xét hiệu

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

$$= \frac{(2^{n+1} - 1)(2^n + 1) - (2^{n+1} + 1)(2^n - 1)}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)}$$

$$= \frac{2^{2n+1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2n+1} + 2^{n+1} - 2^n + 1}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)}$$

$$= \frac{2.2^{n+1} - 2.2^n}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)} > 0.$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy (u_n) tăng.

b) Sáu số hạng đầu :

$$\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{27}, \frac{\sqrt{4}}{81}, \frac{\sqrt{5}}{243}, \frac{\sqrt{6}}{729}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy số giảm.

Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{3^n} = \frac{\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n}}{3^{n+1}}$.

Do $3^{n+1} > 0$, $3\sqrt{n} = \sqrt{9n} = \sqrt{n+8n} > \sqrt{n+1}$, nên $H < 0$.

c) Sáu số hạng đầu :

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy số tăng.

- Với $n = 1$, rõ ràng $u_1 = 1 < \sqrt{2} = u_2$.
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_{k+1} > u_k.$$

Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}^2 + 1} > \sqrt{u_k^2 + 1} = u_{k+1},$$

tức là khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Vậy dãy số tăng.

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh $u_n = \sqrt{n}$ bằng quy nạp.

d) Sáu số hạng đầu : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Ta sẽ chứng minh dãy số giảm bằng quy nạp.

- Với $n = 1$, rõ ràng $u_1 = 1 > \frac{1}{2} = u_2$.
- Giả sử đã có $u_{k+1} < u_k$ $(k \geq 1)$, ta phải chứng minh

$$u_{k+2} < u_{k+1}.$$

Thật vậy, theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+2} = \frac{u_{k+1}}{1 + u_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_{k+1}}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{u_k}} = u_{k+1}$$

(vì $0 < u_{k+1} < u_k$ nên $\frac{1}{u_{k+1}} > \frac{1}{u_k}$). Vậy dãy (u_n) giảm.

Bạn đọc có thể chứng minh $u_n = \frac{1}{n}$ bằng quy nạp.

• ***Ví dụ 2***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{4n + (-1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính sáu số hạng đầu của dãy số. Nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1}. Chứng minh $0 < u_n \leq \dfrac{3n+1}{4n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

a) Sáu số hạng đầu của dãy số : $\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{8}{13}, \dfrac{13}{15}, \dfrac{14}{21}, \dfrac{19}{23}$. Dãy số không tăng và không giảm.

b)
$$u_{2n} = \frac{3.2n + (-1)^{2n}}{4.2n + (-1)^{2n+1}} = \frac{6n+1}{8n-1}.$$

$$u_{2n+1} = \frac{3(2n+1) + (-1)^{2n+1}}{4(2n+1) + (-1)^{2n+2}} = \frac{6n+2}{8n+5}.$$

Dễ thấy $u_n > 0$. Ta xét hai trường hợp :

• n chẵn : $u_n = \dfrac{3n+1}{4n-1}$;

• n lẻ : $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1} < \dfrac{3n+1}{4n-1}$;

Vậy : $0 < u_n \leq \dfrac{3n+1}{4n-1}$ với mọi n.

• ***Ví dụ 3***

Biết năm số hạng đầu của một dãy số là

3, 4, 6, 9, 13, ...

a) Hãy chỉ ra một quy luật rồi viết tiếp 5 số hạng của dãy số đã cho.

b) Hãy xét khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải. Nêu nhận xét và viết tiếp năm số hạng theo cách đó.

c) Lập công thức truy hồi của dãy số được cho theo quy luật nêu ở câu b).

d) Tìm công thức biểu diễn u_n.

Giải

a) Có nhiều quy luật để có một dãy số mà 5 số hạng đầu như đã cho. Đơn giản nhất là dãy số đã cho tuần hoàn với chu kì bằng 5, ta có dãy

$$3, 4, 6, 9, 13, 3, 4, 6, 9, 13, \ldots$$

Tuy nhiên, nếu nhận xét tổng $3 + 4 + 6 + 9 + 13 = 35$ để nêu ra quy luật : "Dãy số gồm liên tiếp các nhóm 5 số hạng có tổng bằng 35" thì theo đó ta sẽ có nhiều kết quả khác nhau, do phương trình 5 ẩn số

$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 35$ là vô định.

"Quy luật" vừa nêu đã vi phạm định nghĩa dãy số.

b) Ta có

$$4 - 3 = 1$$
$$6 - 4 = 2$$
$$9 - 6 = 3$$
$$13 - 9 = 4$$

Nhận xét : Khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải là 4 số hạng đầu của dãy số tự nhiên khác 0. Từ đây có thể nêu kết luận : Năm số hạng trên là các số hạng của một dãy số, trong đó các khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải lập thành dãy số

$1, 2, 3, 4, \ldots, n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy, năm số hạng tiếp theo là

$$18, 24, 31, 39, 48.$$

c) Dễ thấy theo quy luật nêu trên thì

$u_{n+1} - u_n = n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

d) Để tìm u_n ta viết

$$u_1 = 3$$
$$u_2 = u_1 + 1$$
$$u_3 = u_2 + 2$$
$$u_4 = u_3 + 3$$
$$\ldots$$
$$u_{n-1} = u_{n-2} + n - 2$$
$$u_n = u_{n-1} + n - 1.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên và rút gọn, ta có

$$u_n = 3 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1)$$
$$= 3 + \frac{(n-1)n}{2}.$$

Vậy $$u_n = \frac{n^2 - n + 6}{2} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

• ***Ví dụ 4***

Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số ;

b) Dự đoán công thức u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) Năm số hạng đầu là 1, 4, 9, 16, 25.

b) Dự đoán công thức $u_n = n^2$ (*) với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh công thức vừa nêu bằng quy nạp.

Hiển nhiên với $n = 1$, công thức đúng.

Giả sử đã có $u_k = k^2$ với $k \geq 1$.

Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp ta có

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 1$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2 ;$$

tức là công thức (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy $u_n = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• ***Ví dụ 5***

Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n = \frac{na + 2}{n + 1}$, là dãy số tăng ? dãy số giảm ?

Giải

Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)a+2}{n+1+1} - \dfrac{na+2}{n+1}$

$$= \frac{a-2}{(n+2)(n+1)}.$$

Vì $(n+2)(n+1) > 0$ nên :

Nếu $a > 2$ thì $H > 0$, suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Nếu $a < 2$ thì $H < 0$, suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

• ***Ví dụ 6***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$, trong đó $0 < a < 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Viết công thức truy hồi của dãy số ;

b) Khảo sát tính tăng, giảm của dãy số.

Giải

a) Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 - a + 1 + a = 2$.

Với $n \geq 1$ thì $u_{n+1} = (1-a)^{n+1} + (1+a)^{n+1}$

do đó $u_{n+1} - u_n = (1-a)^{n+1} + (1+a)^{n+1} - (1-a)^n - (1+a)^n$

$$= (1-a)^n(1-a-1) + (1+a)^n(1+a-1)$$

$$= a[(1+a)^n - (1-a)^n] \qquad (*)$$

hay $u_{n+1} = u_n + a[(1+a)^n - (1-a)^n]$.

Vậy công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + a[(1+a)^n - (1-a)^n] \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

b) Vì $0 < a < 1$ nên $1 + a > 1 - a > 0$, suy ra $(1+a)^n > (1-a)^n$

hay $(1+a)^n - (1-a)^n > 0$. Từ kết quả (*), ta có

$u_{n+1} - u_n = a[(1+a)^n - (1-a)^n] > 0$, tức là dãy số đã cho là dãy số tăng.

Nhận xét

Cách giải của câu a) cho ta một phương pháp để tìm công thức truy hồi khi biết số hạng tổng quát u_n, đó là

– Tìm u_1.

– Tính u_{n+1} rồi tìm hiệu $u_{n+1} - u_n$ (cũng có thể tìm tổng $u_{n+1} + u_n$).

• ***Ví dụ 7***

Cho phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Gọi α, β là hai nghiệm của nó ($\alpha > \beta$).

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, với $n \geq 1$, là dãy Phi-bô-na-xi.

Giải

Ta có $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Từ công thức u_n suy ra

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1\ ;$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}.1.\sqrt{5} = 1.$$

Để tính u_n, ta chú ý rằng $\alpha^2 = \alpha + 1$ và $\beta^2 = \beta + 1$, do đó

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}\,.\,\alpha^2 - \beta^{n-2}\,.\,\beta^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right) = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Vậy ta có công thức truy hồi của dãy Phi-bô-na-xi

$$\begin{cases} u_1 = 1\ ;\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ với } n \geq 3. \end{cases}$$

• ***Ví dụ 8***

Cho dãy số xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n^2 + \dfrac{5}{2}u_n + 1 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Tính u_2, u_3, u_4 ;

b) Chứng minh rằng $u_{n+3} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

a) $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$. Nếu tính tiếp ta lại có $u_5 = 2$, $u_6 = 0$, $u_7 = 1$. Như vậy dãy số trên gồm các nhóm 3 số hạng (1, 2, 0) được nối tiếp nhau một cách vô hạn.

b) Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$, theo câu a) thì công thức đúng vì $u_4 = 1 = u_1$.

Giả sử công thức đúng với một giá trị bất kì $n = k \geq 1$, tức là $u_{k+3} = u_k$.

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+4} = u_{k+1}.$$

Thật vậy, theo công thức của dãy số thì

$$u_{k+4} = u_{(k+3)+1} = -\frac{3}{2}u_{k+3}^2 + \frac{5}{2}u_{k+3} + 1.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp $u_{k+3} = u_k$, ta có

$$u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1}.$$

Vậy công thức đã được chứng minh.

➤ **Chú ý.** Dãy số đã cho được gọi là dãy số tuần hoàn với chu kì là 3.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau :

Dãy số (u_n) được gọi là tuần hoàn với chu kì p ($p \in \mathbb{N}^*$),

nếu $u_{n+p} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

C. BÀI TẬP

2.1. Viết năm số hạng đầu và khảo sát tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết

a) $u_n = 10^{1-2n}$;

b) $u_n = 3^n - 7$;

c) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$;

d) $u_n = \dfrac{3^n\sqrt{n}}{2^n}$.

2.2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a) Viết công thức truy hồi của dãy số ;

b) Chứng minh dãy số bị chặn dưới ;

c) Tính tổng n số hạng đầu của dãy đã cho.

2.3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1)\,2^n$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số ;

b) Tìm công thức truy hồi ;

c) Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

2.4. Dãy số (u_n) được xác định bằng công thức

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát ;

b) Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

2.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát ;

b) Chứng minh dãy số tăng.

2.6. Tìm công thức số hạng tổng quát của các dãy số sau

a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \ (n \geq 1) \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$

2.7. Dãy số (x_n) được biểu diễn trên trục số bởi tập hợp các điểm, kí hiệu là A :

$$A = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...\}.$$

Gọi B là một điểm nằm ngoài trục số. Người ta dựng các tam giác đỉnh B và hai đỉnh còn lại thuộc tập hợp A.

Đặt u_n là số các tam giác được tạo thành từ B và $n + 1$ điểm

$$A_0, A_1, A_2, ..., A_n$$

rồi lập dãy số (u_n).

a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 ;

b) Chứng minh rằng

$$u_n = C_{n+1}^2 \text{ và } u_{n+1} = u_n + n + 1.$$

2.8. Cho dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện : Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$0 < u_n < 1 \text{ và } u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n}.$$

Chứng minh dãy số đã cho là dãy giảm.

§3. Cấp số cộng

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$, với $n \in \mathbb{N}^*$, d là hằng số. (1)

Hệ quả : Công sai $d = u_{n+1} - u_n$.

2. Số hạng tổng quát

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad (n \geq 2). \tag{2}$$

$$d = \frac{u_n - u_1}{n-1}. \tag{2'}$$

3. Tính chất

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad \text{với } k \geq 2 \tag{3}$$

hay $$u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k. \tag{3'}$$

4. Tổng n số hạng đầu

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2},\ n \in \mathbb{N}^* \tag{4}$$

hoặc $$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}. \tag{4'}$$

➤ **Lưu ý** : Khi giải các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, d, u_n, n, S_n. Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 9 - 5n$.

a) Viết 5 số hạng đầu của dãy ;

b) Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số cộng. Chỉ rõ u_1 và d ;

c) Tính tổng của 100 số hạng đầu.

Giải

a) 4, −1, −6, −11, −16.

b) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 9 - 5(n+1) - 9 + 5n = -5$,

do đó $u_{n+1} = u_n - 5$, suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 4$; $d = -5$.

c) Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ (4')

ta có $S_{100} = \dfrac{100[2.4 + (100-1)(-5)]}{2} = -24\,350$.

➤ **Chú ý** : Nếu sử dụng công thức (4) ta phải tính u_{100}.

• ***Ví dụ 2***

a) Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.

b) Viết năm số hạng xen giữa hai số 25 và 1 để được một cấp số cộng có bảy số hạng. Số hạng thứ 50 của cấp số này là bao nhiêu ?

Giải

a) Ta có $u_1 = 3$, $u_8 = 24$.

Từ công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, suy ra $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$.

Tìm được $d = \dfrac{24-3}{8-1} = 3$.

Vậy 6 số hạng cần viết thêm là 6, 9, 12, 15, 18, 21.

Tính tổng $S_8 = \dfrac{8(3+24)}{2} = 108$.

b) Ta có $u_1 = 25$, $u_7 = 1$, $d = \dfrac{1-25}{7-1} = -4$.

Vậy 5 số cần viết thêm là 21, 17, 13, 9, 5.

Tính $u_{50} = 25 + 49\,.\,(-4) = -171$.

• ***Ví dụ 3***

Cho hai cấp số cộng

(x_n) : 4, 7, 10, 13, 16, ...

(y_n) : 1, 6, 11, 16, 21, ...

Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung ?

Giải

Ta có : $x_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$ với $1 \le n \le 100$,

$y_k = 1 + (k-1)5 = 5k - 4$ với $1 \le k \le 100$.

Để một số là số hạng chung, ta phải có

$$3n + 1 = 5k - 4 \Leftrightarrow 3n = 5(k-1)$$

suy ra $n \vdots 5$, tức $n = 5t$ và $k = 3t + 1$ ($t \in \mathbb{Z}$).

Vì $1 \le n \le 100$ nên $1 \le t \le 20$.

Ứng với 20 giá trị của t, ta tìm được 20 số hạng chung. Chẳng hạn, với $t = 1$ thì $n = 5$, $k = 4$, khi đó $x_5 = y_4 = 16$.

• ***Ví dụ 4***

Tìm x trong các cấp số cộng 1, 6, 11, ... và 1, 4, 7, ... biết :

a) $1 + 6 + 11 + 16 + ... + x = 970$;

b) $(x + 1) + (x + 4) + ... + (x + 28) = 155$.

Giải

a) Ta có cấp số cộng với $u_1 = 1$, $d = 5$, $S_n = 970$ và $u_n = x$. Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$, ta có

$$970 = \frac{n[2 + (n-1)5]}{2} \quad \text{hay} \quad 5n^2 - 3n - 1940 = 0.$$

Giải ra tìm được $n = 20$, suy ra $x = u_{20} = 1 + 19.5 = 96$.

b) Ta có cấp số cộng với $u_1 = x + 1$, $d = 3$, $u_n = x + 28$ và $S_n = 155$.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có

$$x + 28 = x + 1 + (n-1)3, \quad \text{suy ra} \quad n = 10.$$

Từ công thức $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$, ta có $155 = \dfrac{10(2x+29)}{2}$,

từ đó tìm được $x = 1$.

• ***Ví dụ 5***

Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Giải

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a}) = (\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{b})$$

$\Leftrightarrow \quad b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c$ lập thành cấp số cộng.

• ***Ví dụ 6***

Chu vi của một đa giác là 158cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$cm. Biết cạnh lớn nhất là 44cm, tính số cạnh của đa giác đó.

Giải

Gọi cạnh nhỏ nhất là u_1 và số cạnh của đa giác là n.

Ta có $44 = u_1 + (n-1).3$ hay $u_1 = 47 - 3n$.

Tổng các cạnh (tức chu vi đa giác) là 158, ta có

$$158 = \frac{n(44 + 47 - 3n)}{2} \quad \text{hay} \quad 3n^2 - 91n + 316 = 0.$$

Giải phương trình với $n \in \mathbb{N}^*$ ta được $n = 4$.

• ***Ví dụ 7***

Có thể có một tam giác mà số đo các cạnh và chu vi của nó lập thành một cấp số cộng được không ?

Giải

Giả sử tồn tại một tam giác như vậy.

Gọi số đo các cạnh của tam giác là u_1, u_2, u_3 và chu vi của nó là u_4, ta có $u_1 = x - d$, $u_2 = x$, $u_3 = x + d$, $u_4 = 3x$.

Theo tính chất của cấp số cộng thì $u_1 + u_4 = u_2 + u_3$,

nhưng $u_1 + u_4 = 4x - d$, $u_2 + u_3 = 2x + d$ nên $4x - d = 2x + d$, suy ra $x = d$.

Từ đó $u_1 = 0$ (vô lí).

Vậy không thể có tam giác thoả mãn yêu cầu bài toán.

C. BÀI TẬP

3.1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

a) $u_n = 3n - 1$;

b) $u_n = 2^n + 1$;

c) $u_n = (n+1)^2 - n^2$;

d) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 1 - u_n. \end{cases}$

3.2. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết :

a) $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \,; \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 . u_7 = 75. \end{cases}$

3.3. Cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$.

a) Lập công thức số hạng tổng quát u_n ;

b) Tính S_{20}.

3.4. Tính số các số hạng của cấp số cộng (a_n), nếu

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = 126 \\ a_2 + a_{2n} = 42. \end{cases}$$

3.5. Tìm cấp số cộng (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + ... + u_n = a \\ u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = b^2. \end{cases}$

3.6. Chứng minh rằng nếu S_n, S_{2n}, S_{3n} tương ứng là tổng của n, $2n$, $3n$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng thì

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$$

3.7. Cho cấp số cộng (u_n), chứng minh rằng nếu

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

thì $$\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3.8. Tìm x từ phương trình

a) $2 + 7 + 12 + ... + x = 245$, biết 2, 7, 12, ..., x là cấp số cộng.

b) $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + ... + (2x + 96) = 1010$,
biết 1, 6, 11, ... là cấp số cộng.

§4. Cấp số nhân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n q, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Hệ quả : Công bội $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Số hạng tổng quát

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

3. Tính chất

$$u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1}$$

hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}u_{k+1}}$ $(k \geq 2)$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} \ (q \neq 1).$$

➤**Lưu ý :** Khi giải các bài toán về cấp số nhân, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, q, n, u_n, S_n. Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng trên thì có thể tính được các đại lượng còn lại.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^{2n+1}$.

a) Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân. Nêu nhận xét về tính tăng, giảm của dãy số ;

b) Lập công thức truy hồi của dãy số ;

c) Hỏi số 2048 là số hạng thứ mấy của dãy số này ?

Giải

a) Lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{2(n+1)+1}}{2^{2n+1}} = 4$, suy ra $u_{n+1} = 4u_n$;

hoặc biến đổi

$$u_{n+1} = 2^{2(n+1)+1} = 2^{2n+1+2} = 4.2^{2n+1} = 4.u_n.$$

Vì $d = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1$ nên dãy số (u_n) tăng và là cấp số nhân.

b) Cho $n = 1$, ta có $u_1 = 8$. Công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 4u_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

c) Ta có $u_n = 2048 = 2^{11} = 2^{2n+1}$, suy ra $2n + 1 = 11$, từ đó $n = 5$.

Vậy 2048 là số hạng thứ năm.

• ***Ví dụ 2***

a) Viết năm số xen giữa các số 1 và 729 để được một cấp số nhân có bảy số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.

b) Viết sáu số xen giữa các số –2 và 256 để được một cấp số nhân có tám số hạng.

Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu ?

Giải

a) Ta có $u_1 = 1$, $u_7 = 729$.

Vì $u_7 = u_1.q^6$ nên $q^6 = \dfrac{u_7}{u_1} = 729 = 3^6$, suy ra $q = \pm 3$.

Năm số cần viết là 3, 9, 27, 81, 243 hoặc –3, 9, –27, 81, –243.

Với $q = 3$ ta có $S_7 = \dfrac{1.(3^7 - 1)}{3 - 1} = 1093$. Với $q = -3$ ta có $S_7 = 547$.

b) Ta có $u_1 = -2$, $u_8 = 256$.

Mặt khác, $q^7 = \dfrac{u_8}{u_1} = \dfrac{256}{-2} = -128 = (-2)^7$, suy ra $q = -2$.

Sáu số cần viết là 4, –8, 16, –32, 64, –128.

Ta có $u_{15} = -2 . (-2)^{14} = -32768$.

• ***Ví dụ 3***

Dãy số (u_n) được cho như sau

$$\begin{cases} u_1 = 2004, \ u_2 = 2005 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + u_{n-1}}{3} \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Lập dãy (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Chứng minh dãy (v_n) là cấp số nhân.

b) Lập công thức tính u_n theo n.

Giải

a) Từ giả thiết suy ra

$$3u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n - u_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n = -\frac{1}{3}v_{n-1}.$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân, có $q = -\dfrac{1}{3}$ và $v_1 = 1$.

b) Để tính u_n, ta viết

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$$

$$= v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_1 + u_1$$

$$= 2004 + 1.\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = 2004 + \frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

$$= 2004 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

• Ví dụ 4

Cho cấp số nhân a, b, c, d. Chứng minh rằng

a) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$;

b) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$.

Giải

Ta có $b^2=ac$; $c^2=bd$; $ad=bc$.

a) Biến đổi vế trái

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=b^2+c^2-2bc+c^2-2ac+a^2+d^2-2bd+b^2$$

$$=a^2-2ad+d^2=(a-d)^2.$$

b) $(a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$

$$=a^2+c^2+2b^2-b^2=a^2+b^2+c^2.$$

• Ví dụ 5

Tìm cấp số nhân (u_n) biết

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải

Ta thấy $q\neq 1$. Khi đó,

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1(q^4-1)}{q-1}=15 \\ \dfrac{u_1^2(q^8-1)}{q^2-1}=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1^2(q^4-1)^2}{(q-1)^2}=225 \\ \dfrac{u_1^2(q^8-1)}{q^2-1}=85. \end{cases}$$

Chia từng vế của hai phương trình, ta được

$$\frac{(q^4-1)^2(q^2-1)}{(q-1)^2(q^8-1)}=\frac{225}{85}\Leftrightarrow \frac{(q+1)^2(q^2+1)}{q^4+1}=\frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow \quad 14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0.$$

Chia hai vế của phương trình cho q^2 và đặt $x = q + \frac{1}{q}$, ta có

$$14x^2 - 17x - 45 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2}\ ;\ x_2 = -\frac{9}{7}.$$

Ta có hai phương trình

$$q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7} \text{ (vô nghiệm)}$$

và $\quad q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}$. Giải phương trình này tìm được $q = 2$, $q = \frac{1}{2}$.

Tương ứng có $u_1 = 1$, $u_1 = 8$.

Vậy, ta có hai cấp số nhân

$$1, 2, 4, 8, \ldots\ (u_1 = 1, q = 2)$$

và $\quad 8, 4, 2, 1, \ldots\ (u_1 = 8, q = \frac{1}{2})$.

• ***Ví dụ 6***

Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm hai cấp số ấy.

Giải

Nếu có cấp số cộng $3, u_2, u_3$ thì cấp số nhân là

$$3, u_2, \frac{9u_3}{5}.$$

Theo tính chất của các cấp số, ta có

$$u_2 = \frac{3 + u_3}{2} \text{ và } u_2^2 = 3.\frac{9u_3}{5}$$

hay $\left(\frac{3 + u_3}{2}\right)^2 = \frac{27u_3}{5}$. Biến đổi đưa về phương trình

$$5u_3^2 - 78u_3 + 45 = 0\ (u_3 > 3).$$

Giải ra ta có $u_3 = 15$. Vậy các cấp số cần tìm là :

Cấp số cộng 3, 9, 15.

Cấp số nhân 3, 9, 27.

• ***Ví dụ 7***

Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành một cấp số nhân. Biết rằng tổng của số hạng đầu và cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Giải

Gọi bốn số phải tìm là u_1, u_2, u_3, u_4, ta có

Cấp số cộng $u_2 - d, u_2, u_2 + d$

và cấp số nhân u_2, u_2q, u_2q^2.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} 2u_2 + d = u_2(1+q) = 36 & (1) \\ u_2 - d + u_2q^2 = 37. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra

$$u_2 = \frac{36-d}{2} = \frac{36}{1+q} \Rightarrow d = 36 - \frac{72}{1+q}. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra

$$u_2 = \frac{37+d}{1+q^2}, \text{ do đó } \frac{37+d}{1+q^2} = \frac{36}{1+q}. \quad (4)$$

Thay d ở (3) vào hệ thức (4) và rút gọn, ta được phương trình

$$36q^2 - 73q + 35 = 0.$$

Giải ra được $q = \frac{5}{4}$, $q = \frac{7}{9}$.

Vậy, với $q = \frac{5}{4}$ thì

$$u_2 = \frac{36}{1 + \frac{5}{4}} = 16,\ u_3 = 16 \cdot \frac{5}{4} = 20,\ u_4 = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$$

và $$u_1 = 37 - u_4 = 37 - 25 = 12.$$

Bốn số cần tìm là 12, 16, 20, 25.

Giá trị $q = \frac{7}{9}$ không thoả mãn, vì các số u_1, u_2, u_3, u_4 không nguyên.

C. BÀI TẬP

4.1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số nhân ?

a) $u_n = (-5)^{2n+1}$;

b) $u_n = (-1)^n \cdot 3^{3n+1}$;

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n. \end{cases}$

4.2. Cấp số nhân (u_n) có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân ;

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069 ?

c) Số 12 288 là số hạng thứ mấy ?

4.3. Tìm số các số hạng của cấp số nhân (u_n), biết

a) $q = 2$, $u_n = 96$, $S_n = 189$;

b) $u_1 = 2$, $u_n = \frac{1}{8}$, $S_n = \frac{31}{8}$.

4.4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20. \end{cases}$

4.5. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Lần lượt trừ mỗi số ấy cho 2, 6, 7, 2 ta nhận được một cấp số nhân. Tìm các số đó.

4.6. Viết bốn số xen giữa các số 5 và 160 để được một cấp số nhân.

4.7. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

a) Lập dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Chứng minh dãy số (x_n) là cấp số nhân.

b) Tìm công thức tính x_n, u_n theo n.

4.8. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc coi là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một cấp số cộng. Tìm các số đó.

4.9. Cho cấp số nhân a, b, c, d. Chứng minh rằng

a) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$;

b) $(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$.

4.10. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có các số hạng đều dương. Biết rằng các số hạng thứ nhất và thứ hai của chúng trùng nhau. Chứng minh mọi số hạng của cấp số cộng không lớn hơn số hạng tương ứng của cấp số nhân.

Bài tập ôn chương III

Giải các bài tập 1, 2, 3 bằng phương pháp quy nạp.

1. Chứng minh rằng

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên n ;

b) Tổng các lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9.

2. Chứng minh các đẳng thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$

a) $A_n = \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

b) $B_n = 1 + 3 + 6 + 10 + ... + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $3^{n-1} > n(n+2)$ với $n \geq 4$;

b) $2^{n-3} > 3n - 1$ với $n \geq 8$.

4. Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số ;

b) Lập dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng ;

c) Tìm công thức tính u_n theo n.

5. Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n}{3n} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Lập dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số nhân.

c) Tìm công thức tính u_n theo n.

6. Ba số có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để tổng của chúng là 820 ?

7. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ ba bằng nhau. Tìm các cấp số ấy.

8. Chứng minh rằng nếu ba số lập thành một cấp số nhân, đồng thời lập thành cấp số cộng thì ba số ấy bằng nhau.

9. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội là q và số các số hạng là chẵn. Gọi S_c là tổng các số hạng có chỉ số chẵn và S_l là tổng các số hạng có chỉ số lẻ.

Chứng minh rằng $q = \dfrac{S_c}{S_l}$.

10. Có thể có một tam giác vuông mà số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng không ?

11. Tính tổng :

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + ... + \dfrac{2n-1}{2^n}$;

b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} . n^2$.

12. Tìm m để phương trình $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

Bài tập trắc nghiệm (13 – 19)

13. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm :

(A) $u_n = \sin n$; (B) $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$;

(C) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$; (D) $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$.

14. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số bị chặn :

(A) $u_n = \sqrt{n^2+1}$; (B) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$;

(C) $u_n = 2^n + 1$; (D) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

15. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 3$, $u_2 = -6$. Hãy chọn kết quả đúng :

(A) $u_5 = -24$; (B) $u_5 = 48$; (C) $u_5 = -48$; (D) $u_5 = 24$.

16. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

(A) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$

17. Cho cấp số cộng

$$6, x, -2, y.$$

Kết quả nào sau đây là đúng ?

(A) $x = 2, y = 5$;

(B) $x = 4, y = 6$;

(C) $x = 2, y = -6$;

(D) $x = 4, y = -6$.

18. Cho cấp số nhân

$$-2, x, -18, y.$$

Hãy chọn kết quả đúng :

(A) $x = 6, y = -54$;

(B) $x = -10, y = -26$;

(C) $x = -6, y = -54$;

(D) $x = -6, y = 54$.

19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Hãy chọn hệ thức đúng :

(A) $\dfrac{u_1 + u_9}{2} = u_5$;

(B) $\dfrac{u_2u_4}{2} = u_3$;

(C) $1 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \dfrac{u_{100} - 1}{2}$;

(D) $u_1u_2 ... u_{100} = u_{5050}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG III

§1.

1.1. a) Đặt vế trái bằng S_n. Kiểm tra với $n = 1$, hệ thức đúng.

Giả sử đã có $S_k = \dfrac{k(3k + 1)}{2}$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh $S_{k+1} = \dfrac{(k + 1)(3k + 4)}{2}$. Thật vậy,

$$S_{k+1} = S_k + 3(k+1) - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Đặt vế trái bằng P_n, làm tương tự như câu a).

1.2. a) Đặt vế trái bằng S_n.

- Với $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng $\frac{1(4.1-1)}{3} = 1$.

- Giả sử đã có $S_k = \frac{k(4k^2-1)}{3}$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2 - 1\right]}{3}.$$

Thật vậy, ta có

$S_{k+1} = S_k + [2(k+1) - 1]^2 = S_k + (2k+1)^2$

$$= \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(2k+1)\left[k(2k-1) + 3(2k+1)\right]}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} = \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3} = \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2 - 1\right]}{3}.$$

b) Đặt vế trái bằng A_n.

- Dễ thấy với $n = 1$, hệ thức đúng.

- Giả sử đã có $A_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, $(k \geq 1)$.

Ta có $A_{k+1} = A_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

1.3. a) Đặt $A_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Dễ thấy $A_1 = 133$, chia hết cho 133.

Giả sử đã có $A_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133.

Ta có $A_{k+1} = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}.12^2$

$$= 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}(11 + 133) = 11.A_k + 133.12^{2k-1}$$

Vì $A_k \vdots 133$ nên $A_{k+1} \vdots 133$.

b) HD : Đặt $B_n = 2n^3 - 3n^2 + n$, tính B_1.

Giả sử đã có $B_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh $B_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k$ chia hết cho 6.

1.4. a) Với $n = 1$ thì $2^{1+2} = 8 > 7 = 2.1 + 5$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là $2^{k+2} > 2k + 5$. (1)

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+3} > 2(k+1) + 5$ hay $2^{k+3} > 2k + 7$. (2)

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+3} > 4k + 10 = 2k + 7 + 2k + 3.$$

Vì $2k + 3 > 0$ nên $2^{k+3} > 2k + 7$ (đpcm).

b) Với $n = 1$ thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử đã có $\sin^{2k}\alpha + \cos^{2k}\alpha \leq 1$ với $k \geq 1$, ta phải chứng minh

$\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha \leq 1$. Thật vậy, ta có

$$\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha = \sin^{2k}\alpha.\sin^2\alpha + \cos^{2k}\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\leq \sin^{2k}\alpha + \cos^{2k}\alpha \leq 1.$$

1.5. Đây thực chất là bài toán giải bất phương trình trên $\mathbb{N}^*$.

Phương pháp : Có thể dùng phép thử, sau đó dự đoán kết quả và chứng minh.

a) Dùng phép thử với $n = 1, 2, 3, 4$ ta dự đoán : Với $n \geq 3$ thì bất đẳng thức đúng. Ta sẽ chứng minh điều đó bằng quy nạp.

- Với $n = 3$, hiển nhiên đã có kết quả đúng, vì $2^3 = 8 > 2.3 + 1 = 7$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là $2^k > 2k + 1$,

ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2k + 3. \qquad (2)$$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+1} > 4k + 2 = 2k + 3 + 2k - 1 > 2k + 3.$$

b) HD : Dùng phép thử.

Với n từ 1 đến 6, bất đẳng thức đều không đúng. Tuy nhiên không thể vội vàng kết luận bất phương trình vô nghiệm.

Nếu thử tiếp ta thấy rằng bất phương trình đúng khi $n = 7$. Ta có thể làm tiếp để đi tới dự đoán : Với $n \geq 7$ thì bất phương trình được nghiệm đúng. Sau đó chứng minh tương tự như câu a).

c) Làm tương tự như câu a) và câu b).

ĐS : $n \geq 4$.

1.6. a) Tính $S_1 = \frac{1}{5}$, $S_2 = \frac{2}{9}$, $S_3 = \frac{3}{13}$, $S_4 = \frac{4}{17}$.

b) Viết lại $S = \frac{1}{5} = \frac{1}{4.1+1}$, $S_2 = \frac{2}{9} = \frac{2}{4.2+1}$, $S_3 = \frac{3}{4.3+1}$, $S_4 = \frac{4}{4.4+1}$.

Ta có thể dự đoán $S_n = \frac{n}{4n+1}$.

Học sinh tự chứng minh công thức trên.

1.7. Với $n = 1$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k. \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với $1 + a_{k+1}$ ta được

$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k)(1 + a_{k+1}) =$

$= 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} + a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \dots + a_k.a_{k+1}.$

Vì $a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \dots + a_k \,.\, a_{k+1} > 0$ nên

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1},$$

nghĩa là bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$.

1.8. Với $n = 1$ thì $|a_1| = |a_1|$.

Với $n = 2$ thì $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$. Đây là bất đẳng thức khá quen thuộc và dấu bằng xảy ra khi a_1, a_2 cùng dấu.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \ge 2$. Đặt $a_1 + a_2 + ... + a_k = A$, ta có

$$|A| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k|, \qquad (1)$$

mà $\quad |A + a_{k+1}| \le |A| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| + |a_{k+1}|$

nên $\quad |a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| + |a_{k+1}|$,

tức là bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

§2.

2.1. a) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^7}, \frac{1}{10^9}$. Dự đoán dãy (u_n) giảm.

Để chứng minh, ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{1-2(n+1)}}{10^{1-2n}} = \frac{1}{10^2} < 1$. Vậy dãy số giảm.

b) $-4, 2, 20, 74, 236$. Xét dấu của hiệu $u_{n+1} - u_n$.

c) $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{9}, \frac{3}{16}, \frac{3}{25}$. Làm tương tự câu b).

d) $\frac{3}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{4}, \frac{27\sqrt{3}}{8}, \frac{81\sqrt{4}}{16}, \frac{243\sqrt{5}}{32}$. Phần tiếp theo có thể làm tương tự câu a).

➤ **Chú ý.** Qua bốn bài tập trên, học sinh có thể rút ra nhận xét về tính hợp lí của việc xét hiệu $u_{n+1} - u_n$ hay xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, khi khảo sát tính đơn điệu của dãy số.

2.2. a) Ta có $u_1 = 0$.

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - 4(n + 1) + 3 - n^2 + 4n - 3 = 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi là $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \text{ với } n \ge 1. \end{cases}$

b) $u_n = n^2 - 4n + 3 = (n-2)^2 - 1 \geq -1$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên (Học sinh tự giải thích điều này).

c) $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 - 4(1 + 2 + ... + n) + 3n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6} = \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}.$$

2.3. b) HD : Tìm hiệu $u_{n+1} - u_n$.

ĐS : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

c) HD : Xét dấu $u_{n+1} - u_n$.

2.4. a) Từ $u_{n+1} - u_n = n^3$ ta có

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

...

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên và rút gọn, ta được

$$u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3$$

Sử dụng kết quả bài tập 1.2 b) – §1 ta có

$$1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Vậy $$u_n = 1 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

b) $u_{100} = 24\,502\,501$.

2.5. a) Tương tự bài 2.4.

ĐS : $$u_n = 5 + \frac{(n-1)(3n-4)}{2}.$$

b) Tương tự bài 2.1.

2.6. a) HD : Viết vài số hạng đầu để dự đoán công thức rồi chứng minh.

ĐS : $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

b) HD : Làm tương tự bài 2.1.

ĐS : $u_n = 3 - n$.

c) Với chú ý rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3$. Lập tích của $n - 1$ tỉ số

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} = 3^{n-1}.$$

Rút gọn vế trái được $\dfrac{u_n}{u_1} = 3^{n-1}$,

suy ra $$u_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}.$$

2.7. a) $u_1 = 1$

$u_2 = 3$

$u_3 = 6$

$u_4 = 10$

b) Số các tam giác u_n tạo thành từ B và $n + 1$ điểm chính là số tổ hợp chập 2 của $n + 1$ phần tử :

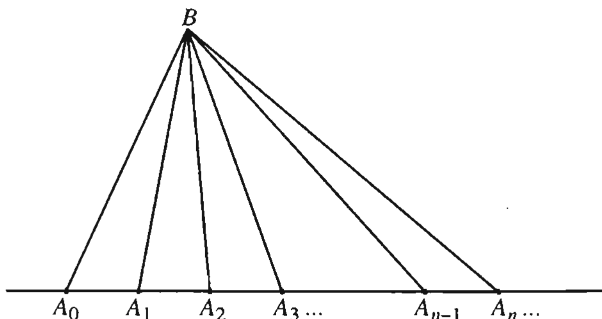
$u_n = C_{n+1}^2$.

Áp dụng công thức

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

ta có $C_{n+2}^2 = C_{n+1}^2 + C_{n+1}^1$

hay $u_{n+1} = u_n + n + 1$.



2.8. Vì $0 < u_n < 1$ với mọi n nên $1 - u_{n+1} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$u_{n+1}(1 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết

$$u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n} \text{ suy ra}$$

$$u_{n+1} \cdot u_n < u_n - \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{1}{4} < u_n(1 - u_{n+1}). \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có

$$u_{n+1}(1 - u_{n+1}) < u_n(1 - u_{n+1}) \text{ hay } u_{n+1} < u_n.$$

§3.

3.1. a) $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 1 - 3n + 1 = 3$.

Vì $u_{n+1} = u_n + 3$ nên dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 2$, $d = 3$.

b) $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 = 2^n$. Vì 2^n không là hằng số nên dãy số (u_n) không phải là cấp số cộng.

c) Ta có $u_n = 2n + 1$.

Vì $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2$, nên dãy đã cho là cấp số cộng với $u_1 = 3$; $d = 2$.

d) Để chứng tỏ (u_n) không phải là cấp số cộng, ta chỉ cần chỉ ra, chẳng hạn $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ là đủ.

3.2. a) $u_1 = 8$, $d = -3$.

b) $u_1 = 1$, $d = 3$.

c) $u_1 = 36$, $d = -13$.

d) $u_1 = 3$, $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$, $d = 2$.

3.3. a) ĐS : $u_n = -11 + 4n \quad (u_1 = -7, d = 4)$.

b) $S_{20} = 620$.

3.4. ĐS : $n = 6$.

3.5. a) Ta có hệ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275. & (2) \end{cases}$

Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ tìm được $u_1 + u_3 = 18$, suy ra $u_2 = 9$ (3)

Thay $u_2 = 9$ vào (1) và (2) ta được hệ

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 18 \\ u_1^2 + u_3^2 = 194. \end{cases}$$

Từ đây tìm được $u_1 = 5$, $u_3 = 13$.

Vậy ta có cấp số cộng 5, 9, 13.

b) Ta có $b^2 = u_1^2 + (u_1 + d)^2 + ... + [u_1 + (n-1)d]^2$

$$= nu_1^2 + 2u_1d[1 + 2 + ... + (n-1)] + d^2[(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]$$

$$= nu_1^2 + n(n-1)u_1d + \frac{n(n-1)(2n-1)d^2}{6}. \quad (1)$$

Mặt khác, $a = nu_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2}$. (2)

Từ (2) tìm được u_1, thay u_1 vào (1) để tìm d.

Kết quả $\quad d = \pm\sqrt{\dfrac{12(nb^2 - a^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$;

$$u_1 = \frac{1}{n}\left[a - \frac{n(n-1)}{2}d\right].$$

3.6. HD : Sử dụng các công thức $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$ và $S_n = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2}$ để chứng minh

$$\frac{S_n}{n} + \frac{S_{3n}}{3n} = \frac{S_{2n}}{n}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra hệ thức cần chứng minh.

3.7. Ta có $$S_m = \frac{2u_1 + (m-1)d}{2}m\ ;$$

$$S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2}n.$$

Theo giả thiết

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{[2u_1 + (m-1)d]m}{[2u_1 + (n-1)d]n} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Suy ra $(2u_1 - d)(m - n) = 0$ (với $m \neq n$).

Từ đó $$u_1 = \frac{d}{2}.$$

Vậy $$\frac{u_m}{u_n} = \frac{u_1 + (m-1)d}{u_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3.8. a) Ta có $u_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$.

$$245 = \frac{n[2.2 + (n-1)5]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - n - 490 = 0.$$

Giải ra được $n = 10$.

Từ đó tìm được $x = u_{10} = 2 + 9.5 = 47$.

b) Xét cấp số cộng 1, 6, 11, ..., 96. Ta có

$$96 = 1 + (n-1)5 \Rightarrow n = 20.$$

Suy ra $$S_{20} = 1 + 6 + 11 + ... + 96 = \frac{20(1+96)}{2} = 970$$

và $$2x \,.\, 20 + 970 = 1010.$$

Từ đó $x = 1$.

§4.

4.1. a) Có thể lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Cấp số nhân có $u_1 = -125$, $q = 25$.

b) Cấp số nhân có $u_1 = -81$, $q = -27$.

c) Dãy số (u_n) không phải là cấp số nhân.

d) Cấp số nhân với $u_1 = 1$, $q = \frac{7}{5}$.

4.2. ĐS : a) $u_1 = 3$, $q = 2$.

b) $n = 10$.

c) $n = 13$.

4.3. ĐS : a) $n = 6$.

b) $n = 5$.

4.4. a) Ta có hệ $\begin{cases} u_1q^4 - u_1 = 15 \\ u_1q^3 - u_1q = 6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u_1(q^4 - 1) = 15 \\ u_1(q^3 - q) = 6. \end{cases}$ (1)

Do (1) nên $q \neq \pm 1$, suy ra $\frac{15}{6} = \frac{q^4 - 1}{q(q^2 - 1)} = \frac{q^2 + 1}{q}$.

Biến đổi về phương trình $2q^2 - 5q + 2 = 0$.

Giải ra được $q = 2$ và $q = \frac{1}{2}$.

Nếu $q = 2$ thì $u_1 = 1$.

Nếu $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = -16$.

b) ĐS : $u_1 = 1$, $q = 2$.

4.5. HD : Gọi 4 số cần tìm là x, y, z, t, ta có :

Cấp số cộng x, y, z, t

Cấp số nhân $x - 2, y - 6, z - 7, t - 2$.

Ta có hệ $\begin{cases} x + z = 2y \\ y + t = 2z \\ (y-6)^2 = (x-2)(z-7) \\ (z-7)^2 = (y-6)(t-2). \end{cases}$

ĐS : $x = 5$, $y = 12$, $z = 19$, $t = 26$.

4.6. ĐS : 10, 20, 40, 80.

4.7. Từ giả thiết có

$$u_{n+1}(u_n + 4) = 2u_n + 3 \text{ hay } u_{n+1} \cdot u_n + 4u_{n+1} = 2u_n + 3. \quad (1)$$

Lập tỉ số $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \cdot \frac{u_n + 3}{u_n - 1} = \frac{u_{n+1}u_n + 3u_{n+1} - u_n - 3}{u_{n+1}u_n - u_{n+1} + 3u_n - 3}. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $u_{n+1}.u_n = 2u_n + 3 - 4u_{n+1}$, thay vào (2) ta được

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2u_n + 3 - 4u_{n+1} + 3u_{n+1} - u_n - 3}{2u_n + 3 - 4u_{n+1} - u_{n+1} + 3u_n - 3} = \frac{u_n - u_{n+1}}{5(u_n - u_{n+1})} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n$, ta có cấp số nhân (x_n) với $q = \frac{1}{5}$ và $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Ta có $$x_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}. \quad (3)$$

Từ đó tìm được $$u_n = \frac{3x_n - 1}{1 - x_n} = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} = -\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}.$$

4.8. HD : Làm tương tự Ví dụ 7.

ĐS : Ba số phải tìm là 2, 14, 98.

4.9. a) Biến đổi vế trái

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$$

$$= \frac{acc^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2ac}{c}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3.$$

b) HD : Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số a, b, c và b, c, d

4.10. HD : Chứng tỏ hai dãy số đều là dãy tăng rồi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập ôn chương III

1. a) HD : Xem ví dụ 2, §1.

b) HD : Đặt $A_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, dễ thấy $A_1 \,\vdots\, 9$.

Giả sử đã có $A_k \,\vdots\, 9$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh $A_{k+1} \,\vdots\, 9$.

Tính $A_{k+1} = A_k + 9k^2 + 27k + 27$.

2. a) HD : Kiểm tra với $n = 1$, sau đó biểu diễn

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

b) HD : Kiểm tra với $n = 1$.

Giả sử đã có $B_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{2}$.

Ta cần chứng minh

$B_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{2}$ bằng cách tính $B_{k+1} = B_k + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3. a) Với $n = 4$ thì $3^{4-1} = 27 > 4(4+2) = 24$.

Giả sử đã có

$$3^{k-1} > k(k+2) \text{ với } k \geq 4. \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với 3, ta có

$$\begin{aligned} 3.3^{k-1} &= 3^{(k+1)-1} > 3k\,(k+2) \\ &= (k+1)\,[(k+1)+2] + 2k^2 + 2k - 3. \end{aligned}$$

Do $\quad 2k^2 + 2k - 3 > 0$ nên $3^{(k+1)-1} > (k+1)\,[(k+1)+2]$,

chứng tỏ bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

b) Giải tương tự câu a).

4. a) Năm số hạng đầu là 1, 2, 4, 7, 11.

b) Từ công thức xác định dãy số ta có

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \text{ hay } u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1. \qquad (1)$$

Vì $v_n = u_{n+1} - u_n$ nên từ (1), ta có

$$v_n = v_{n-1} + 1 \text{ với } n \geq 2. \quad (2)$$

Vậy (v_n) là cấp số cộng với $v_1 = u_2 - u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

c) Để tính u_n, ta viết

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$v_3 = u_4 - u_3$$

$$\ldots$$

$$v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$v_{n-1} = u_n - n_{n-1}$$

Cộng từng vế $n - 1$ hệ thức trên và rút gọn, ta được

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = 1 - u_2 + u_n = 1 - 2 + u_n = u_n - 1,$$

suy ra $u_n = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. a) Năm số hạng đầu là $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{4}{81}, \dfrac{5}{243}$.

b) Lập tỉ số $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \dfrac{n}{n+1}$. (1)

Theo công thức định nghĩa ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$ hay $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.

Vậy, dãy số (v_n) là cấp số nhân, có $v_1 = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{3}$.

c) Để tính u_n, ta viết tích của $n - 1$ tỉ số bằng $\dfrac{1}{3}$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdots \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

hay $\frac{v_n}{v_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, suy ra $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Vậy $u_n = \frac{n}{3^n}$.

6. HD : Gọi số hạng thứ hai của cấp số cộng là u_2, ta có

$$u_9 = u_2 + 7d,\ u_{44} = u_2 + 42d.$$

Sử dụng tính chất của cấp số nhân $u_2 \,.\, u_{44} = u_9^2$ và tổng các số là 217, ta có một hệ phương trình để tìm u_2 và d.

ĐS : $n = 20$.

7. ĐS : Cấp số cộng 5, 25, 45.

Cấp số nhân 5, 15, 45.

8. HD : Gọi 3 số đó là $a - d$, a, $a + d$ rồi áp dụng tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân.

9. Gọi số hạng thứ nhất của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.

Ta có $S_l = u_1 + u_1q^2 + u_1q^4 + \ldots$ (1)

$S_c = u_1q + u_1q^3 + u_1q^5 + \ldots$ (2)

Nhân hai vế của (1) với q ta có

$$qS_l = u_1q + u_1q^3 + u_1q^5 + \ldots = S_c$$

Vậy $q = \frac{S_c}{S_l}$.

10. Gọi số đo ba cạnh của tam giác vuông là $x - d$, x, $x + d$.

Theo giả thiết ta có $(x + d)^2 = (x - d)^2 + x^2$. (1)

Từ (1) tìm được $x = 0$, $x = 4d$.

Như vậy có thể có tam giác vuông thoả mãn đầu bài, các cạnh của nó là $3d$, $4d$, $5d$. Đặc biệt, nếu $d = 1$ thì tam giác vuông có các cạnh là 3, 4, 5 (tam giác Ai Cập).

11. a) HD : Đặt tổng là S_n và tính $2S_n$.

ĐS : $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

b) HD : $n^2 - (n+1)^2 = -2n - 1$. Ta có $1^2 - 2^2 = -3$; $3^2 - 4^2 = -7$; ...

Ta có $u_1 = -3$, $d = -4$ và tính S_n trong từng trường hợp n chẵn, lẻ.

12. Đặt $x^4 = y$, ta có phương trình

$$y^2 - (3m+5)y + (m+1)^2 = 0. \qquad (1)$$

Để phương trình có 4 nghiệm thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương y_1, y_2 ($y_1 < y_2$). Bốn nghiệm đó là $-\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_1}, \sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}$.

Điều kiện để 4 nghiệm trên lập thành cấp số cộng là $\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1} = 2\sqrt{y_1}$ hay $y_2 = 9y_1$, kết hợp với định lí Vi-ét tìm được $m = 5$ và $m = -\frac{25}{19}$.

Đáp án Bài tập trắc nghiệm

13. (C) ; **14.** (D) ; **15.** (B) ; **16.** (C) ;

17. (C) ; **18.** (C) ; **19.** (D).

Chương IV. GIỚI HẠN

§1. Giới hạn của dãy số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - a) = 0$.

2. Giới hạn vô cực

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$.

➤ **Lưu ý** : Thay cho $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$, ta viết tắt $\lim u_n = a$, $\lim u_n = \pm\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$; $\lim n^k = +\infty$, với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$; $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

c) $\lim c = c$ (c là hằng số).

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$, thì :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$;
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$;
- $\lim u_n v_n = ab$;
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$, thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

5. Định lí liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

6. Cấp số nhân lùi vô hạn

- *Cấp số nhân lùi vô hạn* là cấp số nhân vô hạn có công bội q thoả mãn $|q| < 1$.
- Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Cho dãy số (u_n) với $\lim u_n = 1$. Chứng minh rằng, kể từ số hạng nào đó trở đi, tất cả các số hạng của (u_n) đều nằm trong khoảng :

a) $(0,9 ; 1,1)$; b) $(0,99 ; 1,01)$.

Giải

$\lim u_n = 1 \Leftrightarrow \lim(u_n - 1) = 0$. Do đó, $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

a) Lấy số dương này là 0,1 (bằng $\frac{1,1 - 0,9}{2}$), ta có :

$|u_n - 1| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < u_n - 1 < 0,1 \Leftrightarrow 0,9 < u_n < 1,1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, tất cả các số hạng của dãy (u_n), kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nằm trong khoảng (0,9 ; 1,1).

b) Lấy số dương này là 0,01 (bằng $\frac{1,01 - 0,99}{2}$), ta có :

$|u_n - 1| < 0,01 \Leftrightarrow -0,01 < u_n - 1 < 0,01 \Leftrightarrow 0,99 < u_n < 1,01$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, tất cả các số hạng của dãy (u_n), kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nằm trong khoảng (0,99 ; 1,01).

• ***Ví dụ 2***

Biết dãy số (u_n) thoả mãn $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 0$.

Giải

Đặt $v_n = \frac{n+1}{n^2}$. Ta có $\lim v_n = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có $|u_n| \leq v_n \leq |v_n|$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

• ***Ví dụ 3***

Cho biết dãy số (u_n) thoả mãn $u_n > n^2$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$.

Giải

Vì $\lim n^2 = +\infty$ (giới hạn đặc biệt), nên n^2 có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, theo giả thiết $u_n > n^2$ với mọi n, nên u_n cũng có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy $\lim u_n = +\infty$.

➢ **Nhận xét :** Trong các ví dụ trên, ta đã vận dụng trực tiếp các định nghĩa về giới hạn của dãy số.

• ***Ví dụ 4***

Tính $\lim \dfrac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}$.

Giải

Ta có $\lim \dfrac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2} = \lim \dfrac{4 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2} + 2} = 2.$

• ***Ví dụ 5***

Tính $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2}$.

Giải

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2} = \lim \frac{n\sqrt{3 + \dfrac{1}{n^2}} + n}{1 - 2n^2} = \lim \frac{\dfrac{1}{n}\sqrt{3 + \dfrac{1}{n^2}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - 2} = 0.$$

• ***Ví dụ 6***

Tính $\lim \left(n^2 - \dfrac{2}{n+1}\right)$.

Giải

$$\lim \left(n^2 - \frac{2}{n+1}\right) = \lim \frac{n^3 + n^2 - 2}{n + 1} = \lim \frac{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}} = +\infty.$$

• ***Ví dụ 7***

Tính $\lim(-n^2 + n\sqrt{n} + 1)$.

Giải

$$\lim(-n^2 + n\sqrt{n} + 1) = \lim(-n^2)\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}\right) = -\infty.$$

• ***Ví dụ 8***

Tính $\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)$.

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)\left(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}\right)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \lim\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

➤ **Lưu ý** : Khi giải bài toán ở Ví dụ 7, ta đã biến đổi về dạng có thể áp dụng hai tính chất sau :

- $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty.$ (1)
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$. (2)

Tuy nhiên, những biến đổi trên không còn thích hợp với Ví dụ 8. Quả thực, nếu làm tương tự như vậy ta sẽ có :

$$\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right) = \lim\left(n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \lim n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right).$$

Vì $\lim\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = 0$, nên không thể áp dụng tính chất (2) ở trên.

Nhận xét : Để tìm giới hạn của một dãy số ta thường đưa về các giới hạn dạng đặc biệt và áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn hoặc các định lí về giới hạn vô cực.

Để có thể áp dụng được các định lí nói trên, thông thường ta phải thực hiện một vài biến đổi biểu thức xác định dãy số đã cho. Sau đây là vài gợi ý biến đổi, có thể vận dụng tuỳ theo từng trường hợp :

– Nếu biểu thức có dạng phân thức mà mẫu và tử đều chứa các luỹ thừa của n, thì chia tử và mẫu cho n^k, với k là số mũ cao nhất.

– Nếu biểu thức đã cho có chứa n dưới dấu căn, thì có thể nhân tử số và mẫu số với cùng một biểu thức liên hợp.

• ***Ví dụ 9***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{với } n \geq 1. \end{cases}$

Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$, hãy tìm giới hạn đó.

Giải

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 2.$$

Vì $u_n > 0$ nên $\lim u_n = a \geq 0$. Vậy $\lim u_n = 2$.

Lưu ý : Trong lời giải trên, ta đã áp dụng tính chất sau đây.

"Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_{n+1} = a$".

Bạn đọc có thể chứng minh tính chất này bằng định nghĩa.

• ***Ví dụ 10***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \quad \text{với } n \geq 1. \end{cases}$$

Dãy số (u_n) có giới hạn hay không khi $n \to +\infty$?
Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{4}{5}$. Từ đó dự đoán $u_n = \frac{n}{n+1}$. (1)

Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp :

– Với $n = 1$, ta có $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ (đúng).

– Giả sử đẳng thức (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là $u_k = \frac{k}{k+1}$.

Khi đó ta có $u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$, nghĩa là đẳng thức (1) cũng đúng với $n = k + 1$.

– Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta có $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

➢ **Nhận xét** : Để tìm giới hạn của dãy số cho bằng công thức truy hồi ta có thể tìm công thức tổng quát, cho phép tính u_n theo n, bằng cách dự đoán công thức này, và chứng minh dự đoán bằng quy nạp. Sau đó, tìm giới hạn của (u_n) qua công thức tổng quát.

• ***Ví dụ 11***

Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \ldots$

Giải

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì $|q| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Do đó, $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ... = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$.

• ***Ví dụ 12***

Tìm dạng khai triển của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n), biết tổng của nó bằng 32 và $v_2 = 8$.

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{v_1}{1 - q} = 32$. Mặt khác, $v_2 = v_1 q = 8 \Rightarrow v_1 = \frac{8}{q}$.

Thế vào đẳng thức trên ta có : $\frac{8}{q(1 - q)} = 32 \Leftrightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$.

Từ đó $v_n = v_2 q^{n-2} = 8.\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-5}}$.

Vậy dạng khai triển của (v_n) là : $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^{n-5}}, ...$

• ***Ví dụ 13***

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số hữu tỉ :

$a = 2,131313...$ (chu kì 13).

Giải

$$a = 2,131313... = 2 + \frac{13}{100} + \frac{13}{100^2} + ... + \frac{13}{100^n} + ... = 2 + \frac{\frac{13}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99}.$$

(Vì $\frac{13}{100}, \frac{13}{100^2}, ..., \frac{13}{100^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{100}$).

➢ **Nhận xét** : – *Cách tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn :* Nhận dạng xem dãy số đã cho có phải là một cấp số nhân lùi vô hạn không (nếu điều này chưa được nêu lên trong giả thiết của bài toán). Sau đó, áp dụng công thức tính tổng đã biết trong SGK.

– *Cách tìm cấp số nhân lùi vô hạn khi biết một số điều kiện :* Dùng công thức tính tổng để tìm công bội và số hạng đầu.

– *Cách viết một số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số hữu tỉ :* Khai triển số đã cho dưới dạng tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và tính tổng này.

C. BÀI TẬP

1.1. Biết rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0. Giải thích vì sao dãy số (v_n) với $v_n = |u_n|$ cũng có giới hạn là 0. Chiều ngược lại có đúng không ?

1.2. Vì sao dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ không thể có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$?

1.3. Cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, còn dãy số (v_n) không có giới hạn hữu hạn. Dãy số $(u_n + v_n)$ có thể có giới hạn hữu hạn không ?

1.4. a) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = -\infty$ và $v_n \leq u_n$ với mọi n. Có kết luận gì về giới hạn của dãy (v_n) khi $n \to +\infty$?

b) Tìm $\lim v_n$ với $v_n = -n!$.

1.5. Tính giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát sau đây, khi $n \to +\infty$.

a) $a_n = \dfrac{2n - 3n^3 + 1}{n^3 + n^2}$;

b) $b_n = \dfrac{3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$;

c) $c_n = \dfrac{2n\sqrt{n}}{n^2 + 2n - 1}$;

d) $d_n = \dfrac{(2 - 3n)^3(n + 1)^2}{1 - 4n^5}$;

e) $u_n = 2^n + \dfrac{1}{n}$;

f) $v_n = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^n + \dfrac{3^n}{4^n}$;

g) $u_n = \dfrac{3^n - 4^n + 1}{2.4^n + 2^n}$;

h) $v_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{4n^2 - 2}}{n + 3}$.

1.6. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim(n^2 + 2n - 5)$; b) $\lim(-n^3 - 3n^2 - 2)$;

c) $\lim\left[4^n + (-2)^n\right]$; d) $\lim n\left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 2}\right)$.

1.7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Chứng minh rằng nếu $\lim v_n = 0$ và $|u_n| \leq v_n$ với mọi n thì $\lim u_n = 0$.

1.8. Biết $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số (u_n) ?

1.9. Dùng kết quả câu 1.7 để tính giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát như sau :

a) $u_n = \frac{1}{n!}$; b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n - 1}$; c) $u_n = \frac{2 - n(-1)^n}{1 + 2n^2}$;

d) $u_n = (0{,}99)^n \cos n$; e) $u_n = 5^n - \cos\sqrt{n}\,\pi$.

1.10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

1.11. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$

1.12. Tính tổng $S = 1 + 0{,}9 + (0{,}9)^2 + (0{,}9)^3 + \ldots + (0{,}9)^{n-1} + \ldots$

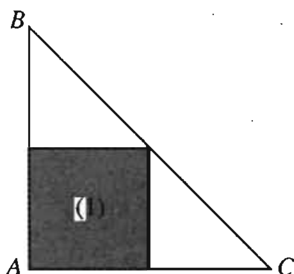
1.13. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \frac{2}{3}$.

1.14. Cho dãy số (b_n) có số hạng tổng quát là $b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + \ldots + \sin^n\alpha$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tìm giới hạn của (b_n).

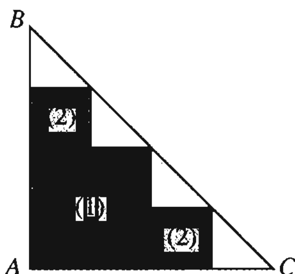
1.15. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 34,121212...$ (chu kì là 12). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

1.16. Giả sử ABC là tam giác vuông cân tại A với độ dài cạnh góc vuông bằng 1. Ta tạo ra các hình vuông theo các bước sau đây :

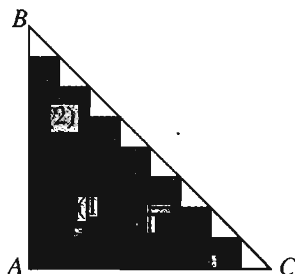
– *Bước 1 :* Dựng hình vuông màu xám có một đỉnh là A, ba đỉnh còn lại là các trung điểm của ba cạnh AB, BC và AC (H.1). Kí hiệu hình vuông này là (1).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

– *Bước 2 :* Với 2 tam giác vuông cân màu trắng còn lại như trong hình 1, ta lại tạo được 2 hình vuông màu xám khác theo cách trên, kí hiệu là (2) (H.2).

– *Bước 3 :* Với 4 tam giác vuông cân màu trắng như trong hình 2, ta lại tạo được 4 hình vuông mới màu xám theo cách trên (H.3).

– ...

– *Bước thứ n :* Ở bước này ta có 2^{n-1} hình vuông mới màu xám được tạo thành theo cách trên, kí hiệu là (n).

a) Gọi u_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông mới được tạo thành ở bước thứ n. Chứng minh rằng $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

b) Gọi S_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông màu xám có được sau n bước. Quan sát hình vẽ để dự đoán giới hạn của S_n khi $n \to +\infty$. Chứng minh dự đoán đó.

§2. Giới hạn của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn

• Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0 ; b)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; x_0)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty ; a)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ thì $\lim f(x_n) = L$.

2. Giới hạn vô cực

Sau đây là hai trong số nhiều loại giới hạn vô cực khác nhau :

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = -\infty$.

• Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

➢ **Nhận xét :** $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi và chỉ khi $-f(x)$ có giới hạn $-\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$; c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$; d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ (c là hằng số).

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số lẻ ; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số chẵn.

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, thì

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$) ;

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

➢ **Chú ý :** Định lí 1 vẫn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lí 2

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		−	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$).

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$.

Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x_n - 1)(x_n + \frac{3}{2})}{x_n - 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2(x_n + \frac{3}{2}) = 5. \text{ Do đó, } \lim_{x\to 1} f(x) = 5.$$

• ***Ví dụ 2***

> Cho hàm số $$f(x) = \begin{cases} x \quad, \text{ nếu } x \geq 0 \\ 1 - x, \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$
>
> Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \frac{1}{n}$.

Ta có $x_n \to 0$ và $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$ (1)

Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{1}{n}$.

Ta có $y_n \to 0$ và $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - y_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

➢ Nhận xét

Để dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thường làm như sau :

• Chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thoả mãn : a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y = f(x)$ và khác x_0 ; $a_n \to x_0$; $b_n \to x_0$;

• Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong các giới hạn này không tồn tại.

➤ **Lưu ý** : Trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ hay $x \to \pm\infty$ chứng minh tương tự.

• ***Ví dụ 3***

Tính

a) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)$; b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$; e) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)=\sqrt{(-2)^2+5}-1=2$;

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3+1}{3-2}=4$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3})=+\infty$.

d) Ta có $\lim\limits_{x\to4}(1-x)=-3<0$. (1)

$\lim\limits_{x\to4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq4$. (2)

Áp dụng qui tắc về giới hạn vô cực đối với thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$.

e) Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}(2x-1)=5>0$, $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0$ và $(x-3)<0$ với mọi $x<3$. Do đó, $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}=-\infty$.

➤ **Nhận xét**

Trong các ví dụ trên ta đã dùng trực tiếp các định lí về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương và căn của các hàm số hoặc các quy tắc về giới hạn vô cực.

• ***Ví dụ 4***

Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2-x}+2x)$.

Giải

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{4}{3}.$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}-\left(\sqrt{x+7}+3\right)=-6.$$

c) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=-2.$$

d) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{1}{2}.$$

e) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(x+1)}=-1.$$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4x^2-x)-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}-2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}.$$

Nhận xét

Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp định lí về giới hạn trong sách giáo khoa, ta phải biến đổi biểu thức xác định hàm số về dạng áp dụng được các định lí này.

Sau đây là một số cách biến đổi thường được dùng.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=0$

– Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, ta biến đổi như sau :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}\text{ và tính }\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}.$$

– Nếu $u(x)$ hay $v(x)$ có chứa biến số dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp, trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$

– Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x (hay phân tích tử và mẫu thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).

– Nếu $u(x)$ hay $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho luỹ thừa của x.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-v(x)\right]$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}u(x).v(x)$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$.

Nhân và chia với biểu thức liên hợp (nếu có biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thức) hoặc quy đồng mẫu để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

C. BÀI TẬP

2.1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+3}{3-x}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

2.2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{, nếu } x\ge 0\\ x^2-1, & \text{nếu } x<0.\end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$. Từ đó dự đoán về giới hạn của $f(x)$ khi $x\to 0$.

b) Dùng định nghĩa chứng minh dự đoán trên.

2.3. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x\to +\infty$.

b) Giải thích bằng đồ thị kết luận ở câu a).

2.4. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ a)$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng, nếu $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = M$ thì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x).g(x) = L.M$.

2.5. Tìm giới hạn của các hàm số sau :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ khi $x\to 3$; b) $h(x)=\dfrac{2x^3+15}{(x+2)^2}$ khi $x\to -2$;

c) $k(x)=\sqrt{4x^2-x+1}$ khi $x\to -\infty$; d) $f(x)=x^3+x^2+1$ khi $x\to -\infty$;

e) $h(x)=\dfrac{x-15}{x+2}$ khi $x\to -2^+$ và khi $x\to -2^-$.

2.6. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{x^2-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$.

2.7. Tính giới hạn của các hàm số sau khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}$;

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}$.

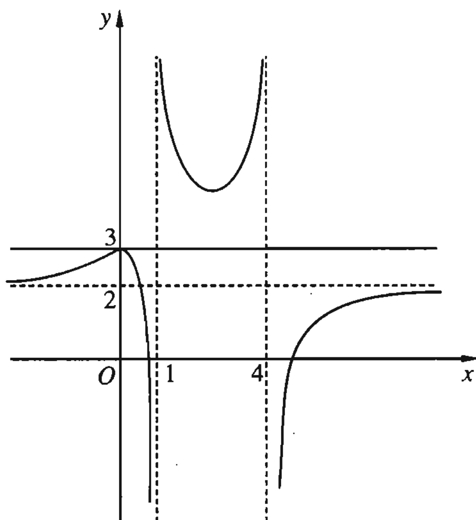
2.8. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4}$$

có đồ thị như hình 4.

a) Dựa vào đồ thị, dự đoán giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to 1^+$; $x \to 1^-$; $x \to 4^+$; $x \to 4^-$; $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$.

b) Chứng minh dự đoán trên.



Hình 4

2.9. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}, & \text{nếu } x > 1 \\ mx + 2, & \text{nếu } x \le 1. \end{cases}$$

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 1$? Tìm giới hạn này.

2.10. Cho khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K \setminus \{x_0\}$.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ thì luôn tồn tại ít nhất một số c thuộc $K\setminus\{x_0\}$ sao cho $f(c) > 0$.

2.11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ thì luôn tồn tại ít nhất một số c thuộc $(a ; +\infty)$ sao cho $f(c) < 0$.

§3. Hàm số liên tục

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

$y = f(x)$ *liên tục* tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a ; b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

➢ **Nhận xét** : Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

2. Các định lí

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó :

a) Các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0 ;

b) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0, nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Mệnh đề tương đương :

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1}, & \text{nếu } x \neq -1 \\ 2 \quad , & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$

tại điểm $x = -1$.

Giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$, chứa $x = -1$.

Ta có, $f(-1) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+3}{x-1} = -1 \neq f(-1)$.

Do đó, hàm số không liên tục tại $x = -1$.

• ***Ví dụ 2***

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3}, & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 \quad , & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

– Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$.

– Tại $x = 3$, ta có $f(3) = 5$,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 1) = 4 \neq f(3).$$

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x = 3$.

– Kết luận : Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 3)$, $(3 ; +\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 3$.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất hai nghiệm :

$$2x^3 - 10x - 7 = 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7$.

Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $[-1 ; 0]$ và $[0 ; 3]$. (1)

Mặt khác, ta có :

$$f(-1) = 1 ; f(0) = -7 \quad \text{và} \quad f(3) = 17.$$

Do đó $f(-1).f(0) < 0$ và $f(0).f(3) < 0$. (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng $(-1 ; 0)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $(0 ; 3)$.

• ***Ví dụ 4***

> Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :
>
> $$(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

Vì $f(0) = -1 < 0$ và $f(-1) = m^2 + 1 > 0$ nên $f(-1)f(0) < 0$ với mọi m. (1)

Mặt khác, $f(x)$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $[-1 ; 0]$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$, nghĩa là phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

➢ **Nhận xét**

Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm, chỉ cần tìm được hai số a và b sao cho :

$$f(a).f(b) < 0 \text{ và hàm số } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a ; b].$$

Chú ý. Nếu phương trình chứa tham số, thì chọn a và b sao cho :

$f(a)$ và $f(b)$ không còn chứa tham số hay chứa tham số nhưng có dấu không đổi ; hoặc $f(a).f(b)$ chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

C. BÀI TẬP

3.1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{(x-1)|x|}{x}$.

Vẽ đồ thị của hàm số này. Từ đồ thị dự đoán các khoảng trên đó hàm số liên tục và chứng minh dự đoán đó.

3.2. Cho ví dụ về một hàm số liên tục trên $(a ; b]$ và trên $(b ; c)$ nhưng không liên tục trên $(a ; c)$.

3.3. Chứng minh rằng nếu một hàm số liên tục trên $(a ; b]$ và trên $[b ; c)$ thì nó liên tục trên $(a ; c)$.

3.4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

Hướng dẫn : Đặt $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$ và biểu diễn $f(x)$ qua $g(x)$.

3.5. Xét tính liên tục của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ tại $x = 4$;

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1}, & \text{nếu } x < 1 \\ -2x, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

3.6. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}, & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}, & \text{nếu } x = \sqrt{2} \end{cases}$;

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3, & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$

3.7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ m, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

liên tục tại $x = 2$.

3.8. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}, & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2, & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

liên tục trên $(0 ; +\infty)$.

3.9. Chứng minh rằng phương trình

a) $x^5 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm ;

b) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6} ; \pi\right)$;

c) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương.

3.10. Phương trình $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(-1 ; 3)$?

3.11. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :

a) $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$;

b) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$.

3.12. Chứng minh phương trình

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ luôn có nghiệm với n là số tự nhiên lẻ.

3.13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(a ; b)$? Cho ví dụ minh hoạ.

3.14. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nhưng $f(a)f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(a ; b)$? Hãy giải thích câu trả lời bằng minh hoạ hình học.

Bài tập ôn chương IV

1. Tính các giới hạn sau $(n \to +\infty)$:

a) $\lim \dfrac{(-3)^n + 2.5^n}{1 - 5^n}$;

b) $\lim \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2 + n + 1}$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}\right)$.

2. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$;

b) $u_n = \dfrac{2^n - n}{3^n + 1}$.

3. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,131131131... (chu kì 131) dưới dạng phân số.

4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ với mọi n.

b) Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

5. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_n < M$ với mọi n. Chứng minh rằng nếu $\lim u_n = a$ thì $a \leq M$.

6. Từ độ cao 63m của tháp nghiêng PISA ở Italia (H.5) người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó.

Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất.



Hình 5

7. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

8. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 5}{x^2 + x - 3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x^2 + 8x + 3}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2x^2\sqrt{x} - 1)$;

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 - 5x - 4}{(x + 1)^2}$.

9. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 + 5x - 1}{1 - x^2 + x^4}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^2 - x + 1}}{1 - 2x}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$;

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2}\right)$.

10. Xác định một hàm số $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

a) $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1}, & \text{nếu } x \neq -1 \\ 1, & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

12. Xác định một hàm số $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

a) $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$,

b) $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty ; 0)$ và trên $[0 ; +\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 0$.

13. Chứng minh rằng phương trình :

a) $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm ;

b) $m(x-1)^3(x^2-4) + x^4 - 3 = 0$ luôn có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của tham số m ;

c) $x^3 - 3x = m$ có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của $m \in (-2 ; 2)$.

14. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x + 1}{x - 2} = 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không

a) Trong khoảng $(1 ; 3)$?

b) Trong khoảng $(-3 ; 1)$?

15. Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$ và $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[0 ; \frac{1}{2}]$.

16. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = +\infty$;

(B) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = -\infty$;

(C) Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim|u_n| = 0$;

(D) Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim|u_n| = a$.

17. $\lim\dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1}$ bằng

(A) 1 ; (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

18. $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right)$ bằng

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) $-\dfrac{1}{2}$; (D) $-\infty$.

19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - x^3 + 1\right)$ bằng

(A) ; 1 (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

20. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-1}{x-2}$ bằng

(A) $-\infty$; (B) $\dfrac{1}{4}$; (C) 1 ; (D) $+\infty$.

21. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+3x}$. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ bằng

(A) $+\infty$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) 1 ; (D) $-\infty$.

22. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2 - 6}{9 + 3x}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$; (B) $-\infty$; (C) $\dfrac{1}{6}$; (D) $+\infty$.

23. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{x + 1}$ bằng

(A) 2 ; (B) -2 ; (C) 1 ; (D) -1.

24. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a ; b]$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

(B) Nếu $f(a) f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

(C) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$, thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a ; b)$.

(D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

25. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. (1)

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1 ; 1)$;

(B) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2 ; 0)$;

(C) Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2 ; 1)$;

(D) Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0 ; 2)$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG IV

§1.

1.1. Vì (u_n) có giới hạn là 0 nên $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, $|v_n| = ||u_n|| = |u_n|$. Do đó, $|v_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy, (v_n) có giới hạn là 0.

(Chứng minh tương tự, ta có chiều ngược lại cũng đúng).

1.2. Vì $|u_n| = |(-1)^n| = 1$, nên $|u_n|$ không thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Chẳng hạn, $|u_n|$ không thể nhỏ hơn 0,5 với mọi n.

Do đó, dãy số (u_n) không thể có giới hạn là 0.

1.3. Dãy $(u_n + v_n)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, giả sử ngược lại, $(u_n + v_n)$ có giới hạn hữu hạn.

Khi đó, các dãy số $(u_n + v_n)$ và (u_n) cùng có giới hạn hữu hạn, nên hiệu của chúng cũng là một dãy có giới hạn hữu hạn, nghĩa là dãy số có số hạng tổng quát là $u_n + v_n - u_n = v_n$ có giới hạn hữu hạn. Điều này trái với giả thiết (v_n) không có giới hạn hữu hạn.

1.4. a) Vì $\lim u_n = -\infty$ nên $\lim(-u_n) = +\infty$. Do đó, $(-u_n)$ có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, vì $v_n \le u_n$ với mọi n nên $(-v_n) \ge (-u_n)$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(-v_n)$ có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Do đó, $\lim(-v_n) = +\infty$ hay $\lim v_n = -\infty$.

b) Xét dãy số $(u_n) = -n$.

Ta có $-n! < -n$ hay $v_n < u_n$ với mọi n. Mặt khác $\lim u_n = \lim(-n) = -\infty$.

Từ kết quả câu a) suy ra $\lim v_n = \lim(-n!) = -\infty$.

1.5. a) -3 ; b) $+\infty$; c) 0 ; d) $\frac{27}{4}$;

e) $\lim\left(2^n + \frac{1}{n}\right) = \lim 2^n\left(1 + \frac{1}{n}.\frac{1}{2^n}\right) = +\infty$;

f) 0 ; g) $-\frac{1}{2}$; h) -1.

1.6. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\frac{3}{2}$.

1.7. $\lim v_n = 0 \Rightarrow |v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Vì $|u_n| \le v_n$ và $v_n \le |v_n|$ với mọi n, nên $|u_n| \le |v_n|$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

1.8. $\lim u_n = 2$.

1.9. a) Vì $\left|\frac{1}{n!}\right| < \frac{1}{n}$ với mọi n và $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\frac{1}{n!} = 0$.

b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ;

e) Ta có $u_n = 5^n - \cos\sqrt{n}\pi = 5^n\left(1 - \frac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right)$. (1)

Vì $\left|\frac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right| \le \frac{1}{5^n}$ và $\lim\frac{1}{5^n} = 0$ nên $\lim\frac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n} = 0$.

Do đó, $\lim\left(1 - \frac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right) = 1 > 0$. (2)

Mặt khác, $\lim 5^n = +\infty$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim(5^n - \cos\sqrt{n}\pi) = \lim 5^n\left(1 - \frac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right) = +\infty$.

1.10. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Ta có, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{5}{4}$, $u_4 = \frac{9}{8}$, $u_5 = \frac{17}{16}$.

Dự đoán, $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp (bạn đọc tự chứng minh).

Từ đó, $\lim u_n = \lim \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = \lim\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim\left[1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] = 1.$

1.11. $\frac{2}{3}$.

1.12. 10.

1.13. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

1.14. Dãy số : $\sin\alpha, \sin^2\alpha, \ldots, \sin^n\alpha, \ldots$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, là một cấp số nhân vô hạn, công bội $q = \sin\alpha$.

Vì $|\sin\alpha| < 1$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $(\sin^n\alpha)$ là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Hơn nữa, $b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + \ldots + \sin^n\alpha = S_n$.

Do đó, $\lim b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + \ldots + \sin^n\alpha + \ldots = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$.

1.15. Giải tương tự Ví dụ 13, ta có $a = 34,121212\ldots = \frac{1126}{33}$.

1.16. a) Chứng minh bằng quy nạp $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (1)

– Với $n = 1$, một hình vuông được tạo thành có diện tích là $u_1 = \dfrac{1}{2^2}$.

Vậy (1) đúng.

– Giả sử công thức (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là $u_k = \frac{1}{2^{k+1}}$. Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh $u_{k+1} = \frac{1}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, ở bước thứ k ta có 2^{k-1} hình vuông mới màu xám được tạo thành. Ứng với mỗi hình vuông này ta lại tạo được hai hình vuông mới trong bước thứ $k + 1$.

Tổng diện tích của hai hình vuông mới này trong bước thứ $k + 1$ bằng nửa diện tích của hình vuông tương ứng trong bước thứ k.

Do đó, tổng diện tích tất cả các hình vuông mới có được trong bước thứ $k + 1$ là $u_{k+1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+2}}$. Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

– *Kết luận :* Với mọi n nguyên dương ta luôn có $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

b) *Dự đoán :* $S_n \to \frac{1}{2}S_{ABC}$ khi $n \to +\infty$, hay $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

Chứng minh : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$. Từ đó, $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

§2

2.1. a) – 4 ; b) $+\infty$.

2.2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, nếu } x \geq 0 \\ x^2 - 1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

a) (H.6) *Dự đoán :* Hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

b) Lấy hai dãy số có số hạng tổng quát là $a_n = \frac{1}{n}$ và $b_n = -\frac{1}{n}$.

Ta có, $a_n \to 0$ và $b_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. (1)

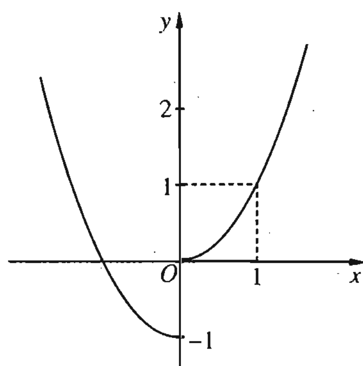
Vì $\frac{1}{n} > 0$ nên $f(a_n) = \frac{1}{n^2}$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. (2)

Vì, $-\frac{1}{n} < 0$ nên $f(b_n) = \frac{1}{n^2} - 1$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.



Hình 6

2.3. a) Xét hai dãy số (a_n) với $a_n = 2n\pi$ và (b_n) với $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có, $\lim a_n = \lim 2n\pi = +\infty$;

$$\lim b_n = \lim\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim n\left(\frac{\pi}{2n} + 2\pi\right) = +\infty\ ;$$

$$\lim \sin a_n = \lim \sin 2n\pi = \lim 0 = 0\ ;$$

$$\lim \sin b_n = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim 1 = 1.$$

Như vậy, $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, nhưng $\lim \sin a_n \neq \lim \sin b_n$. Do đó, theo định nghĩa, hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

2.4. Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = M$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = M$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n).g(x_n) = L.M$.

Từ định nghĩa suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).g(x) = L.M$.

2.5. a) 0 ; b) $-\infty$;

c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-x+1} = \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$$

d) $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2+1) = \lim_{x\to-\infty}x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}) = -\infty.$

e) $-\infty$ và $+\infty$.

2.6. a) $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to-3}\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{4}.$

b) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{(1+x-1)\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x}$

$= \lim_{x\to0}\frac{x\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x} = \lim_{x\to0}\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right] = 3.$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$

d) $\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

$= \lim_{x\to5}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}.$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}}{x}} = +\infty$

(Vì $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}}{x} > 0$ với mọi $x > 0$).

f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5-9}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{-2}{3}.$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x}+1}=2.$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+3}{1-\dfrac{9}{x^3}}=3.$

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}.\left(\dfrac{-x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x^2+1}=-1.$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).x^5\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^5}{x^7+x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^5}{1+\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{3}{x^7}}=(-2)^5=-32.$

2.7. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{1+\dfrac{2}{x}}=1$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-1.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to+\infty}\left(x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-x+1)}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

2.8. a) *Dự đoán :* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$.

b) • Ta có,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -1 < 0,\ \lim_{x\to 1^+}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$$

và $x^2 - 5x + 4 < 0$ với mọi $x \in (1 ; 4)$ nên

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = +\infty.$$

• Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -1 < 0,\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi $x < 1$ nên

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = -\infty.$$

• Vì $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -16 < 0,\ \lim\limits_{x\to 4^+}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi $x > 4$ nên

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = -\infty.$$

• Vì $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -16 < 0,\ \lim\limits_{x\to 4^-}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 < 0$ với mọi $x \in (1 ; 4)$ nên

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = +\infty.$$

• $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2 - \dfrac{15}{x} + \dfrac{12}{x^2}}{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}} = 2 ;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2 - \dfrac{15}{x} + \dfrac{12}{x^2}}{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}} = 2.$$

2.9. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (mx + 2) = m + 2.$

$f(x)$ có giới hạn khi $x \to 1 \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

2.10. Vì $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ ta luôn có $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Từ định nghĩa suy ra $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $f(x_n) > 1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại ít nhất một số $x_k \in K \setminus \{x_0\}$ sao cho $f(x_k) > 1$.

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) > 0$.

2.11. Vì $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta luôn có $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$.

Do đó $\lim_{n \to +\infty} \left[-f(x_n)\right] = +\infty$.

Theo định nghĩa suy ra $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 2 thì $-f(x_n) > 2$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại ít nhất một số $x_k \in (a\ ;\ +\infty)$ sao cho $-f(x_k) > 2$ hay $f(x_k) < -2 < 0$.

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) < 0$.

§3

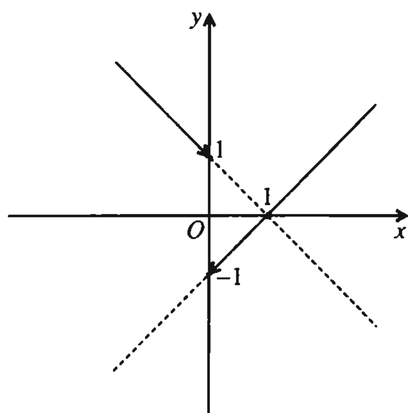
3.1. a) $f(x) = \dfrac{(x-1)|x|}{x} = \begin{cases} x - 1, \text{ nếu } x > 0 \\ 1 - x, \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$

Hàm số này có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Từ đồ thị (H.7) dự đoán $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; +\infty)$, nhưng không liên tục trên $\mathbb{R}$. Thật vậy,

– Với $x > 0$, $f(x) = x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục trên $(0 ; +\infty)$.

– Với $x < 0$, $f(x) = 1 - x$ cũng là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục trên $(-\infty ; 0)$.



Hình 7

Dễ thấy hàm số gián đoạn tại $x = 0$, vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

3.2. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ nếu } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$

• *Trường hợp* $x \leq 0$.

$f(x) = x + 2$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên nó liên tục trên $(-2 ; 0]$.

• *Trường hợp* $x > 0$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(0 ; 2)$ thuộc tập xác định của nó.

Như vậy $f(x)$ liên tục trên $(-2 ; 0]$ và trên $(0 ; 2)$.

Tuy nhiên, vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ nên hàm số $f(x)$ không có giới hạn hữu hạn tại $x = 0$. Do đó, nó không liên tục tại $x = 0$. Nghĩa là không liên tục trên $(-2 ; 2)$.

3.3. Vì hàm số liên tục trên $(a ; b]$ nên liên tục trên $(a ; b)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. (1)

Vì hàm số liên tục trên $[b ; c)$ nên liên tục trên $(b ; c)$ và $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(a ; b)$, $(b ; c)$ và liên tục tại $x = b$ (vì $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$). Nghĩa là nó liên tục trên $(a ; c)$.

3.4. Đặt $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$.

Suy ra $g(x)$ xác định trên $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Mặt khác, $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + (x - x_0)\, g(x)$ nên

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + L(x - x_0) + (x - x_0)\, g(x) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} L(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} (x - x_0) . \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0).$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0.

3.5. a) Hàm số $f(x) = \sqrt{x + 5}$ có tập xác định là $[-5 ; +\infty)$. Do đó, nó xác định trên khoảng $(-5 ; +\infty)$ chứa $x = 4$.

Vì $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x + 5} = 3 = f(4)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 4$.

b) Hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1}, & \text{nếu } x < 1 \\ -2x \quad , & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có, $g(1) = -2$. (1)

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(\sqrt{2 - x} + 1)}{1 - x}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (-\sqrt{2 - x} - 1) = -2. \quad (2)$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2x) = -2. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -2 = g(1)$. Vậy $g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

3.6. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}, & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}, & \text{nếu } x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

• Nếu $x \neq \sqrt{2}$ thì $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty ; \sqrt{2})$ và $(\sqrt{2} ; +\infty)$.

• Tại $x = \sqrt{2}$:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}}$$

$= \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$. Vậy hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$.

Kết luận : $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

• Nếu $x \neq 2$ thì $g(x) = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$.

• Tại $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2} = -\infty$. Vậy hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Kết luận : $y = g(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 2$.

3.7. $m = 3$.

3.8. $m = \pm\dfrac{1}{2}$.

3.9. a) Xét $f(x) = x^5 - 3x - 7$ và hai số 0 ; 2.

b) Xét $f(x) = \cos 2x - 2\sin x + 2$ trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

c) Ta có, $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 3 = 0$.

Hàm số $f(x) = x^3 + 6x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn [0 ; 1]. (1)

Ta có $f(0)f(1) = -3.4 < 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $x^3 + 6x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (0 ; 1).

Do đó, phương trình $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

3.10. *Hướng dẫn :* Xét $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ trên đoạn [–1 ; 1]. *Trả lời* : Có.

3.11. a) $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$.

$f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên [–2 ; –1].

Ta có $f(-1) = -1 < 0$ và $f(-2) = m^2 + 2 > 0$ nên $f(-1)f(-2) < 0$ với mọi m.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trong khoảng (–2 ; –1) với mọi m. Nghĩa là, phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

b) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$.

HD : Xét hàm số $f(x) = m(2\cos x - \sqrt{2}) - 2\sin 5x - 1$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

3.12. Hàm số $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = +\infty.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to +\infty$, ta luôn có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Do đó, $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $f(x_n) > 1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại số a sao cho $f(a) > 1$. (1)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n)$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = -\infty \quad (\text{do } n \text{ lẻ}).$$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to -\infty$, ta luôn có

$\lim f(x_n) = -\infty$, hay $\lim\left[-f(x_n)\right] = +\infty$.

Do đó, $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $-f(x_n) > 1$ kể từ số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại b sao cho $-f(b) > 1$ hay $f(b) < -1$. (2)

- Từ (1) và (2) suy ra $f(a)f(b) < 0$.

Mặt khác, hàm đa thức $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên $[a ; b]$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

3.13. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

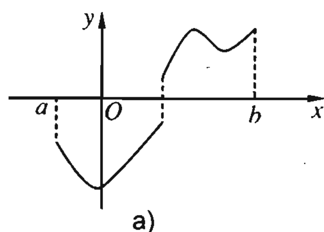
Ví dụ minh hoạ :

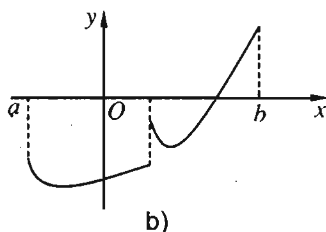
- $f(x) = x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$, $f(-2)f(2) = 9 > 0$. Phương trình $x^2 - 1 = 0$ có nghiệm $x = \pm 1$ trong khoảng $(-2 ; 2)$.

- $f(x) = x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$ và $f(-1)f(1) = 4 > 0$. Còn phương trình $x^2 + 1 = 0$ lại vô nghiệm trong khoảng $(-1 ; 1)$.

3.14. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nhưng $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.

Minh hoạ hình học (H.8) :





Hình 8

a) $f(x) = 0$ vô nghiệm trong $(a\ ;\ b)$; b) $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a\ ;\ b)$.

Bài tập ôn chương IV

1. a) -2 ; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

2. a) Ta có, $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$. Đặt $v_n = \frac{1}{n^2+1}$. (1)

Ta có $\lim v_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ (1) suy ra, $|u_n| = v_n = |v_n|$.

Vậy, $|u_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

b) Hướng dẫn : $|u_n| = \left|\frac{2^n - n}{3^n+1}\right| < \frac{2^n}{3^n+1}$.

3. $2{,}131131131\ldots = 2 + \frac{131}{1000} + \frac{131}{1000^2} + \ldots + \frac{131}{1000^n} + \ldots$

$$= 2 + \frac{\frac{131}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = 2 + \frac{131}{999} = \frac{2129}{999}.$$

(Vì $\frac{131}{1000}, \frac{131}{1000^2}, ..., \frac{131}{1000^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{1000}$).

4. a) Chứng minh bằng quy nạp : $u_n > 0$ với mọi n. (1)

– Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 > 0$.

– Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $u_k > 0$, ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

Ta có $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2}$. Vì $u_k > 0$ nên $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2} > 0$.

– *Kết luận* : $u_n > 0$ với mọi n.

b) Đặt $\lim u_n = a$.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow a = \frac{2a + 3}{a + 2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}.$$

Vì $u_n > 0$ với mọi n, nên $\lim u_n = a \geq 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = \sqrt{3}$.

5. Xét dãy số (v_n) với $v_n = M - u_n$.

$u_n < M$ với mọi $n \Rightarrow v_n > 0$ với mọi n. (1)

Mặt khác, $\lim v_n = \lim(M - u_n) = M - a$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M - a \geq 0$ hay $a \leq M$.

6. Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến

– thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 63$;

– thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 63 + 2.\frac{63}{10}$;

– thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2}$;

– thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + 2.\frac{63}{10^3}$;

...

– thời điểm chạm đất lần thứ n ($n > 1$) là

$$d_n = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}}.$$

(Có thể chứng minh khẳng định này bằng quy nạp).

Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến khi nằm yên trên mặt đất là :

$$d = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... \text{ (mét)}.$$

Vì $2.\frac{63}{10}, 2.\frac{63}{10^2}, ..., 2.\frac{63}{10^{n-1}}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{10}$,

nên ta có $2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... = \frac{2.\frac{63}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 14.$

Vậy, $d = 63 + 2.\frac{63}{10} + 2.\frac{63}{10^2} + ... + 2.\frac{63}{10^{n-1}} + ... = 63 + 14 = 77$ (mét).

7. *Hướng dẫn :* Chọn hai dãy số có số hạng tổng quát là $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Tính và so sánh $\lim f(a_n)$ và $\lim f(b_n)$ để kết luận về giới hạn của $f(x)$ khi $x \to 0$.

8. a) -3 ; b) 6 ; c) $+\infty$; d) $-\infty$.

9. a) 4 ; b) 1 ; c) 2 ; d) $\frac{1}{2}$;

e) $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{x^2-4}=-\infty.$

10. Chẳng hạn $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $f(x)$ thoả mãn các điều kiện đã nêu.

11. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

12. *Hướng dẫn :* Chẳng hạn xét $f(x)=\begin{cases} x^2\ , & \text{nếu } x\geq 0\\ x-1, & \text{nếu } x<0.\end{cases}$

13. *Hướng dẫn :*

a) Xét hàm số $f(x)=x^5-5x-1$ trên các đoạn $[-2\ ;-1]$, $[-1\ ;0]$ và $[0\ ;3]$.

b) Xét hàm số $f(x)=m(x-1)^3(x^2-4)+x^4-3$ trên các đoạn $[-2\ ;1]$, $[1\ ;2]$.

c) Xét hàm số $f(x)=x^3-3x-m$ trên các đoạn $[-1\ ;1]$, $[1\ ;2]$.

14. a) Với $x\neq 2$ ta có $\dfrac{x^3+8x+1}{x-2}=0\Leftrightarrow x^3+8x+1=0.$

Vì $x^3+8x+1>0$ với mọi $x\in(1\ ;3)$ nên phương trình $x^3+8x+1=0$ không có nghiệm trong khoảng $(1\ ;3)$. Do đó, phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng này.

b) $f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên $(-\infty\ ;2)$. Do đó, nó liên tục trên $[-3\ ;1]$.

Mặt khác, $f(-3)f(1)=-100<0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-3\ ;1)$.

15. Xét hàm số $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$.

Ta có $g(0)=f(0)-f(0+\frac{1}{2})=f(0)-f(\frac{1}{2})$,

$g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(1)=f(\frac{1}{2})-f(0)$

(vì theo giả thiết $f(0)=f(1)$).

Do đó, $g(0)\,g(\frac{1}{2}) = [f(0) - f(\frac{1}{2})]\,[f(\frac{1}{2}) - f(0)] = -\,[f(0) - f(\frac{1}{2})]^2 \leq 0$.

– Nếu $g(0)\,g(\frac{1}{2}) = 0$ thì $x = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

– Nếu $g(0)\,g(\frac{1}{2}) < 0$. (1)

Vì $y = f(x)$ và $y = f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên đoạn $[0\,;\,1]$, nên hàm số $y = g(x)$ cũng liên tục trên $[0\,;\,1]$ và do đó nó liên tục trên $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0\,;\,\frac{1}{2})$.

Kết luận : Phương trình $g(x) = 0$ hay $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[0\,;\,\frac{1}{2}]$.

Đáp án Bài tập trắc nghiệm

16. (C). **17.** (B). **18.** (C). **19.** (D). **20.** (A).

21. (D). **22.** (B). **23.** (B). **24.** (D). **25.** (D).

Chương V. ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$, $x_0 \in (a\,;b)$, $x_0 + \Delta x \in (a\,;b)$.

Nếu tồn tại, giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

được gọi là *đạo hàm* của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1 : Với Δx là số gia của đối số tại x_0, tính

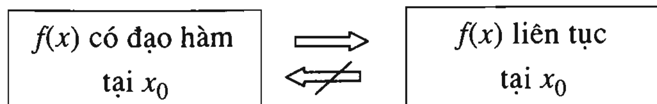
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,;$$

Bước 2 : Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

Bước 3 : Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

➤ **Chú ý** : Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a\,;b)$.

3. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm



4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu tồn tại, $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0\,;f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M_0 là

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0).}$$

5. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

$v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x-1}$ tại $x_0 = 5$.

Giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

• Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 5$ sao cho $5 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = \sqrt{2(5+\Delta x)-1} - \sqrt{10-1}.$$

• Ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9+2\Delta x} - \sqrt{9}}{\Delta x}.$$

• Khi đó

$$y'(5) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\sqrt{9+2\Delta x}-3)(\sqrt{9+2\Delta x}+3)}{\Delta x(\sqrt{9+2\Delta x}+3)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{9+2\Delta x-9}{\Delta x(\sqrt{9+2\Delta x}+3)} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2}{\sqrt{9+2\Delta x}+3} = \frac{1}{3}.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + x}{x - 2}. \qquad (\mathscr{C})$$

a) Hãy tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số đã cho tại $x = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $A(1\ ;\ -2)$.

Giải

a) Với Δx là số gia của đối số tại $x = 1$, ta có

$$\Delta y = \frac{(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x)}{1 + \Delta x - 2} - \frac{1+1}{1-2}$$

$$= \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 1 + \Delta x}{\Delta x - 1} + 2$$

$$= \frac{2 + 3\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x - 2}{\Delta x - 1} = \frac{5\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x - 1}\ ;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 + \Delta x}{\Delta x - 1}\ ;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 + \Delta x}{\Delta x - 1} = -5.$$

Vậy $\quad y'(1) = -5.$

b) Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại $A(1\ ;\ -2)$ là

$$y + 2 = -5(x - 1)$$

hay $\quad y = -5x + 3.$

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

Giải

a) Ta có $f(0) = 1$.

Trước hết, ta tính giới hạn bên phải của tỉ số $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Ta có

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x-1)^2 - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{x}$$

$$= x - 2 \text{ (với } x \neq 0),$$

do đó

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2.$$

Sau đó ta tính giới hạn bên trái :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2.$$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi $x \to 0$. Điều đó chứng tỏ hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1)^2 = 1,$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1)^2 = 1$

và $f(0) = 1$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

• ***Ví dụ 4***

Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\sin x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-\sin x) = 0,$

$g(0) = \cos 0 = 1$

nên hàm số $y = g(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Do đó hàm số này không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

C. BÀI TẬP

1.1. Sử dụng định nghĩa, hãy tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 3x - 5$; b) $y = x^2 - 9$;

c) $y = 4x - x^2$; d) $y = \sqrt{3x+1}$;

e) $y = \dfrac{1}{x-2}$.

1.2. Cho $f(x) = 3x^2 - 4x + 9$. Tính $f'(1)$.

1.3. Cho $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.4. Cho $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Tính $f'(0), f'(1)$.

1.5. Cho $\varphi(x) = \dfrac{8}{x}$. Chứng minh rằng $\varphi'(-2) = \varphi'(2)$.

1.6. Chứng minh rằng hàm số $y = |x-1|$ không có đạo hàm tại $x = 1$, nhưng liên tục tại điểm đó.

1.7. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \text{sign}x = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x > 0 \\ 0, \text{ nếu } x = 0 \\ -1, \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x = 0$.

1.8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số

a) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$;

b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $(-1 ; -2)$;

c) $y = \sqrt{2x + 1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\dfrac{1}{3}$.

§2. Các quy tắc tính đạo hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức

$(c)' = 0 \qquad (c = \text{const})$;

$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R})$;

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0)$.

2. Phép toán

$(U + V - W)' = U' + V' - W'$;

$(UV)' = U'V + UV'$;

$(kU)' = kU' \qquad (k = \text{const})$;

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2} \qquad (V \neq 0)$;

$\left(\dfrac{1}{V}\right)' = -\dfrac{V'}{V^2}$.

3. Đạo hàm của hàm hợp

$$y'_x = y'_u \,.\, u'_x .$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x).$$

Giải

Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm ta được :

$$y' = (4x^3 - 2x^2 - 5x)'(x^2 - 7x) + (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)'$$

$$= (12x^2 - 4x - 5)(x^2 - 7x) + (4x^3 - 2x^2 - 5x)(2x - 7)$$

$$= 12x^4 - 84x^3 - 4x^3 + 28x^2 - 5x^2 + 35x + 8x^4 - 28x^3 - 4x^3 + 14x^2 - 10x^2 + 35x$$

$$= 20x^4 - 120x^3 + 27x^2 + 70x.$$

• ***Ví dụ 2***

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right).$$

Giải

$$y' = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)'\left(\sqrt{x} - 1\right) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)'$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 1\right) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vậy $$y' = \left(-\frac{2}{x^2} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 1\right) + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}.$$

• ***Ví dụ 3***

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}.$$

Giải

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương, ta được

$$y' = \frac{(-x^2+2x+3)'(x^3-2)-(-x^2+2x+3)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}$$

$$= \frac{(-2x+2)(x^3-2)-(-x^2+2x+3).3x^2}{(x^3-2)^2}$$

$$= \frac{-2x^4+2x^3+4x-4-(-3x^4+6x^3+9x^2)}{(x^3-2)^2}.$$

Vậy $y' = \dfrac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{(x^3-2)^2}.$

• ***Ví dụ 4***

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = (x-2)\sqrt{x^2+1}.$$

Giải

$$y' = (x-2)'\sqrt{x^2+1} + (x-2)\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \sqrt{x^2+1} + \frac{(x-2)(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Suy ra $y' = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$

C. BÀI TẬP

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (2.1 – 2.11) :

2.1. $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}.$

2.2. $y = -9x^3 + 0,2x^2 - 0,14x + 5.$

2.3. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{6}{7x^4}.$

2.4. $y = -6\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}.$

2.5. $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$.

2.6. $y = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$.

2.7. $y = \dfrac{5 - 3x - x^2}{x - 2}$.

2.8. $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)^2(x^4 + 1)^3$.

2.9. $y = \left(x^5 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$.

2.10. $y = \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)^4$ (a, b, c là các hằng số).

2.11. $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}$.

2.12. Rút gọn

$$f(x) = \left(\frac{x - 1}{2\left(\sqrt{x} + 1\right)} + 1\right).\frac{2}{\sqrt{x} + 1} : \left(\frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 2}} + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4} - x + 2}\right)^2$$

và tìm $f'(x)$.

2.13. Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Chứng minh rằng

$$f'(1) + f'(-1) = -4f(0).$$

2.14. Cho $f(x) = 2x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$.

Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

2.15. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

2.16. Cho $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$. Giải bất phương trình $f(x) \le g'(x)$.

2.17. Tính $f'(-1)$, biết rằng $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

2.18. Tính $g'(1)$, biết rằng $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2$.

2.19. Tính $h'(0)$, biết rằng $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

2.20. Tính $\varphi'(2)$, biết rằng $\varphi(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

2.21. Chứng minh rằng nếu $S(r)$ là diện tích hình tròn bán kính r thì $S'(r)$ là chu vi đường tròn đó.

2.22. Chứng minh rằng nếu $V(R)$ là thể tích hình cầu bán kính R thì $V'(R)$ là diện tích mặt cầu đó.

2.23. Giả sử V là thể tích hình trụ tròn xoay với chiều cao h và bán kính đáy r. Chứng minh rằng với r là hằng số thì đạo hàm $V'(h)$ bằng diện tích đáy hình trụ và với h là hằng số thì đạo hàm $V'(r)$ bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

§3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$(\sin x)' = \cos x$; $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$.

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\qquad$ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sin 3x + \cos\dfrac{x}{5} + \tan\sqrt{x}$;

b) $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \tan\dfrac{a}{x}$.

Giải

a) Ta có $y' = 3\cos 3x - \frac{1}{5}\sin\frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

b) Ta có $y' = (x^2 - 5x + 1)'\cos(x^2 - 5x + 1) + \dfrac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\cos^2\frac{a}{x}}$

$$= (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 1) - \frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}.$$

• ***Ví dụ 2***

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sin\frac{1}{x^2}$;

b) $y = \sqrt{x}\cot 2x$;

c) $y = 3\sin^2 x\cos x + \cos^2 x$.

Giải

a) $y' = \left(\sin\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)'\cos\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$.

b) $y' = (\sqrt{x})'\cot 2x + \sqrt{x}(\cot 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cot 2x - \frac{2\sqrt{x}}{\sin^2 2x}$.

c) $y' = 3(\sin^2 x)'\cos x + 3\sin^2 x(\cos x)' + (\cos^2 x)'$

$= 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x - 2\cos x\sin x$

$= \sin x(6\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\cos x)$.

C. BÀI TẬP

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (3.1 – 3.15) :

3.1. $y = \sqrt{\tan^3 x}$.

3.2. $y = \dfrac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)}$.

3.3. $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$.

3.4. $y = \cos\dfrac{x}{x+1}$.

3.5. $y = \tan^2 x - \cot x^2$.

3.6. $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ tại $t = \dfrac{\pi}{6}$.

3.7. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 0{,}1x^{10}$.

3.8. $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

3.9. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$.

3.10. $y = (1 + 3x + 5x^2)^4$.

3.11. $y = (3 - \sin x)^3$.

3.12. $y = \sin^2 3x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3.13. $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$.

3.14. $y = \cot\sqrt{1 + x^2}$.

3.15. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

3.16. Cho $f(x) = 5x^2 - 16\sqrt{x} + 7$. Tính $f'(1), f'(4), f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

3.17. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng

a) $f(x) = 3x + \dfrac{60}{x} - \dfrac{64}{x^3} + 5$;

b) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$.

3.18. Giải các bất phương trình

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{9}{4}x^4 + 8x - 3$;

b) $g'(x) \le 0$ với $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$;

c) $\varphi'(x) < 0$ với $\varphi(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$.

3.19. Xác định m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \dfrac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$;

b) $g'(x) < 0$ với $g(x) = \dfrac{mx^3}{3} - \dfrac{mx^2}{2} + (m+1)x - 15.$

3.20. Chứng minh rằng $f'(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nếu :

a) $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$;

b) $f(x) = \cos^6 x + 2\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x$;

c) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$;

d) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right).$

3.21. Tìm $f'(1), f'(2), f'(3)$ nếu

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

3.22. Tìm $f'(2)$ nếu

$$f(x) = x^2\sin(x-2).$$

3.23. Cho $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x.$

Với những giá trị nào của x thì :

a) $y'(x) = 0$; b) $y'(x) = -2$; c) $y'(x) = 10$?

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (3.24 – 3.40) :

3.24. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5.$

3.25. $y = (x-a)(x-b).$

3.26. $y = \dfrac{ax+b}{a+b}.$

3.27. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3.$

3.28. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha).$

3.29. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n).$

3.30. $y = (1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3$.

3.31. $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

3.32. $y = \dfrac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}$.

3.33. $y = \dfrac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

3.34. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

3.35. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

3.36. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$.

3.37. $y = \sin(\cos^2 x) . \cos(\sin^2 x)$.

3.38. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

3.39. $y = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$.

3.40. $y = \tan x - \dfrac{1}{3}\tan^3 x + \dfrac{1}{5}\tan^5 x$.

§4. Vi phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a ; b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a ; b)$.

Tích $f'(x)\Delta x$ (hay $y'.\Delta x$) được gọi là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại x, ứng với số gia Δx, kí hiệu là $df(x)$ hay dy.

➤ **Chú ý**: Vì $dx = \Delta x$ nên

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm vi phân của các hàm số

a) $y = \sin x - x\cos x$;

b) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Giải

a) Ta có $y' = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$,

do đó $dy = (x\sin x)dx$.

b) Vì $y' = -\dfrac{3}{x^4}$ nên ta có

$$dy = -\frac{3dx}{x^4}.$$

• ***Ví dụ 2***

Tìm $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

Giải

Ta có $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \dfrac{(\sin x)'dx}{(\cos x)'dx} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x \left(x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

C. BÀI TẬP

4.1. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 2x + 1.$$

Hãy tính $\Delta f(1)$, $df(1)$ và so sánh chúng, nếu

a) $\Delta x = 1$;

b) $\Delta x = 0,1$;

c) $\Delta x = 0,01$.

Tìm vi phân của các hàm số sau (4.2 – 4.5) :

4.2. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

4.3. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

4.4. $y = \sin^2 x$.

4.5. $y = \dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4.6. Tìm $\dfrac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$.

4.7. Chứng minh rằng vi phân dy và số gia Δy của hàm số $y = ax + b$ trùng nhau.

4.8. Chứng minh rằng với $|x|$ rất bé so với $a > 0$ ($|x| \le a$) ta có

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0).$$

Áp dụng công thức trên, hãy tính gần đúng các số sau :

a) $\sqrt{146}$; b) $\sqrt{34}$; c) $\sqrt{120}$.

§5. Đạo hàm cấp hai

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm của nó là *đạo hàm cấp hai* của $f(x)$ và kí hiệu là $f''(x)$:

$$(f'(x))' = f''(x).$$

Tương tự

$$(f''(x))' = f'''(x) \text{ hoặc } f^{(3)}(x)$$

$$\ldots$$

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

ở đây kí hiệu $f^{(0)}(x) = f(x)$; $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính y'', biết rằng

a) $y = x\sqrt{1 + x^2}$;

b) $y = \tan x$.

Giải

a) $$y' = \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$; suy ra

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1 + x^2} - \dfrac{x(1 + 2x^2)}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2}$$

$$= \frac{4x(1 + x^2) - x(1 + 2x^2)}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$$

b) $$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$; suy ra

$$y'' = -\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \right).$$

• ***Ví dụ 2***

Cho $f(x) = (2x - 3)^5$. Tính $f''(3)$, $f'''(3)$.

Giải

Ta có $f'(x) = 5.2\,(2x-3)^4 = 10\,(2x-3)^4.$

$f''(x) = 80\,(2x-3)^3;$

$f'''(x) = 2\,.\,240\,(2x-3)^2 = 480\,(2x-3)^2.$

Từ đó $f''(3) = 80.3^3 = 2160;$

$f'''(3) = 480.3^2 = 4320.$

C. BÀI TẬP

Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau (5.1 – 5.12) :

5.1. $y = \sin 5x \cos 2x.$

5.2. $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}.$

5.3. $y = \dfrac{x}{x^2-1}.$

5.4. $y = \dfrac{x+1}{x-2}.$

5.5. $y = x^2 \sin x.$

5.6. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

5.7. $y = (1-x^2)\cos x.$

5.8. $y = \sqrt{x}.$

5.9. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x.$

5.10. $y = \dfrac{x^2}{1-x}.$

5.11. $y = x\cos 2x.$

5.12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Bài tập ôn chương V

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x\cot^2 x$;

b) $y = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\cos 3x}$;

c) $y = (\sin 2x + 8)^3$;

d) $y = (2x^3 - 5)\tan x.$

2. Tìm đạo hàm của hàm số tại điểm đã chỉ ra :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$, $\quad f'(0) = ?$

b) $y = (4x+5)^2$, $\quad y'(0) = ?$

c) $g(x) = \sin 4x \cos 4x$, $\quad g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?$

3. Chứng minh rằng $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nếu

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$;

b) $f(x) = 2x + \sin x$.

4. Xác định a để $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, biết rằng

$$f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1.$$

5. Xác định a để $g'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, biết rằng

$$g(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax.$$

6. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Trên đường cong $y = 4x^2 - 6x + 3$, hãy tìm điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x$.

8. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ cắt trục hoành tại gốc toạ độ dưới một góc bao nhiêu độ (góc giữa trục hoành và tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm) ?

9. Cho các hàm số

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \,; \qquad (\mathscr{C})$$

$$g(x) = x^2 - 3x - 1.$$

a) Xác định b, c, d sao cho đồ thị ($\mathscr{C}$) đi qua các điểm (1 ; 3), (–1 ; –3) và

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3};$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$;

c) Giải phương trình $f'(\sin t) = 3$;

d) Giải phương trình $f''(\cos t) = g'(\sin t)$;

e) Tìm giới hạn $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f''(\sin 5z) + 2}{g'(\sin 3z) + 3}$.

10. Chứng minh rằng tiếp tuyến của hypebol $y = \dfrac{a^2}{x}$ lập thành với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

11. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(z)$ có đạo hàm đến cấp n thì

$$[f(ax + b)]_x^{(n)} = a^n f_z^{(n)}(ax + b).$$

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG V

§1.

1.1. a) $y' = 3$; b) $y' = 2x$; c) $y' = 4 - 2x$;

d) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$; e) $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

1.2. $f'(1) = 2$.

1.3. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

1.4. $f'(0) = \dfrac{1}{3}$; không có $f'(1)$.

1.5. $\varphi'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$ nên $\varphi'(-2) = \varphi'(2) = -2$.

1.6. HD. Xem Ví dụ 3.

1.7. HD. Xem Ví dụ 4.

1.8. a) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$;

b) $y = 9x + 7$;

c) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{3}$.

§2.

2.1. $y' = 5x^4 - 12x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

2.2. $y' = -27x^2 + 0{,}4x - 0{,}14$.

2.3. $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{24}{7x^5}$.

2.4. $y' = -\dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$.

2.5. $y' = -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2$.

2.6. $y' = \dfrac{11}{(x+4)^2}$.

2.7. $y' = \dfrac{-x^2 + 4x + 1}{(x-2)^2}$.

2.8. $y' = 2x(x^3+1)^2(x^4+1)^3 + 6x^2(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)^3$
$+ 12x^3(x^2+1)(x^3+1)^2(x^4+1)^2$.

2.9. $y' = 3\left(x^5 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2\left(5x^4 + \dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}\right)$.

2.10. $y' = -4\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)^3\left(\frac{b}{x^2} + \frac{2c}{x^3}\right).$

2.11. $y' = \frac{3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}.$

2.12. $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f'(x) = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2}.$

2.13. Bạn đọc tự chứng minh.

2.14. $(-\infty ; 0) \cup (1 ; +\infty).$

2.15. $(-\infty ; 0) \cup (1 ; +\infty).$

2.16. $[-1 ; 0).$

2.17. -6.

2.18. $\frac{1}{2}.$

2.19. $\frac{1}{2}.$

2.20. $\frac{3}{2}.$

2.21. Vì $S(r) = \pi r^2$ nên $S'(r) = 2\pi r$ là chu vi đường tròn.

2.22. Vì $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ nên $V'(R) = 4\pi R^2$ là diện tích mặt cầu.

2.23. Vì $V = \pi r^2 h$ nên

$V'(h) = \pi r^2$ là diện tích đáy hình trụ ;

$V'(r) = 2\pi rh$ là diện tích xung quanh của hình trụ.

§3.

3.1. $y' = \frac{3\tan^2 x}{2\cos^2 x\sqrt{\tan^3 x}}.$

3.2. $y' = -\frac{10\sin\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)}.$

3.3. $y' = \dfrac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2}.$

3.4. $y' = -\dfrac{\sin\dfrac{x}{x+1}}{(x+1)^2}.$

3.5. $y' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{2x}{\sin^2 x^2}.$

3.6. $f'(t) = \dfrac{-\sin t(1-\sin t) + \cos^2 t}{(1-\sin t)^2} = \dfrac{1}{1-\sin t}$; Do đó $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2.$

3.7. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + x^9.$

3.8. $y' = \dfrac{-3x^2 + 2x + 2}{(x^2 - x + 1)^2}.$

3.9. $g'(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi - \sin\varphi - 1}{(1-\cos\varphi)^2}.$

3.10. $y' = 4(1 + 3x + 5x^2)^3 (3 + 10x).$

3.11. $y' = -3(3 - \sin x)^2 \cos x.$

3.12. $y' = 3\sin 6x + \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}.$

3.13. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\tan x}.\cos^2 x}.$

3.14. $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}\sin^2\sqrt{1+x^2}}.$

3.15. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$

3.16. $f'(1) = 2,$ $f'(4) = 36,$ $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{27}{2}.$

3.17. a) $\{\pm 2, \pm 4\}$.

b) $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3.18. a) $x < 1, x > 2$.

b) Vô nghiệm.

c) $\left(-\infty ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right)$.

3.19. a) $m > 3$.

b) $m < -\frac{4}{3}$.

3.20. *Cách 1*. Chứng minh các biểu thức đã cho không phụ thuộc vào x. Từ đó suy ra $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$;

b) $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$;

c) $f(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) \Rightarrow f'(x) = 0$;

d) $f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow f'(x) = 0$.

Cách 2. Lấy đạo hàm của $f(x)$ rồi chứng minh rằng $f'(x) = 0$.

3.21. -8 ; 0 ; 0.

3.22. 4.

3.23. $y' = x^2 + x - 2$

a) -2 ; 1.

b) -1 ; 0.

c) -4 ; 3.

3.24. $y' = 10a^3x - 5x^4$.

3.25. $y' = 2x - (a + b)$.

3.26. $y' = \dfrac{a}{a+b}$.

3.27. $y' = 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$.

3.28. $y' = x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

3.29. $y' = mn\left[x^{n-1} + x^{m-1} + (m+n)x^{m+n-1}\right]$.

3.30. $y' = -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$.

3.31. $y' = \dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

3.32. $y' = \dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \neq 1)$.

3.33. $y' = \dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(x \neq 1)$.

3.34. $y' = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

3.35. $y' = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$ $(|x| < |a|)$.

3.36. $y' = x^2\sin x$.

3.37. $y' = -\sin 2x \,.\, \cos(\cos 2x)$.

3.38. $y' = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

3.39. $y' = \dfrac{2}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

3.40. $y' = 1 + \tan^6 x$ $\left(x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

§4.

4.1. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$,

$df(1) = \Delta x$.

a) $\Delta f(1) = 5 > df(1) = 1$.

b) $\Delta f(1) = 0,131 > df(1) = 0,1$.

c) $\Delta f(1) = 0,010301 > df(1) = 0,01$.

4.2. $dy = -\dfrac{2}{x^3}dx$.

4.3. $dy = -\dfrac{3}{(x-1)^2}dx$.

4.4. $dy = (\sin 2x)dx$.

4.5. $dy = \dfrac{2\sqrt{x} - \sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$.

4.6. $-\tan^2 x \qquad \left(x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

4.7. $y = ax + b \Rightarrow y' = a$ và $dy = adx = a\Delta x$;

$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - [ax + b] = a\Delta x$.

Vậy $dy = \Delta y$.

4.8. Đặt $y(x) = \sqrt{a^2 + x}$, ta có $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 + x}}$.

Từ đó

$$\Delta y = y(x) - y(0) \approx y'(0)\,x \Rightarrow \sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{1}{2a}x.$$

Áp dụng :

a) 12,08 ; b) 5,83 ; c) 10,95.

§5.

5.1. $y = \sin 5x \cos 2x = \dfrac{1}{2}[\sin 7x + \sin 3x]$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1}{2}(49\sin 7x + 9\sin 3x).$$

5.2. $y = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$, do đó

$$y'' = 2\left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3}\right].$$

5.3. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right]$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow y'' = \left[\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}\right].$$

5.4. $y = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$; $y'' = \dfrac{6}{(x-2)^3}$.

5.5. $y'' = (2 - x^2)\sin x + 4x\cos x.$

5.6. $y'' = \dfrac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$

5.7. $y'' = (x^2 - 3)\cos x + 4x\sin x.$

5.8. $y'' = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}.$

5.9. $y = \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 4x - \dfrac{1}{4}\sin 6x$;

$$y'' = -\sin 2x - 4\sin 4x + 9\sin 6x.$$

5.10. $y = -x - 1 + \dfrac{1}{1-x}$;

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

5.11. $y'' = -4\sin 2x - 4x\cos 2x.$

5.12. $y'' = \dfrac{3}{4\sqrt{x^5}}.$

Bài tập ôn chương V

1. a) $\cot^2 x - \dfrac{2x\cos x}{\sin^3 x}$;

b) $\dfrac{\cos\sqrt{x}\cos 3x + 6\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\sin 3x}{2\sqrt{x}\cos^2 3x}$;

c) $6\cos 2x\,(\sin 2x + 8)^2$;

d) $6x^2\tan x + \dfrac{2x^3 - 5}{\cos^2 x}.$

2. a) $\dfrac{1}{8}$; b) 40 ; c) -2.

3. a) $f'(x) = 6(x^8 - x^5 + x^2 - x + 1)$

$$= 6x^2\left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + 3x^2 + 6\left(\frac{x^2}{4} - x + 1\right)$$

$$= 6x^2\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + 3x^2 + 6\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) $f'(x) = 2 + \cos x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

4. $f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + 2.$

$\Delta' = (a-1)^2 - 6 = a^2 - 2a - 5$. Ta phải có

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 5 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{6} < a < 1 + \sqrt{6}$.

Vậy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $1 - \sqrt{6} < a < 1 + \sqrt{6}$.

5.
$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - 2a\cos 2x - \cos 3x + 2a \\ &= 4a\sin^2 x + 2\sin x \sin 2x \\ &= 4a\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos x \\ &= 4\sin^2 x\,(a + \cos x). \end{aligned}$$

Rõ ràng với $a > 1$ thì $a + \cos x > 0$ và $\sin^2 x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

nên với $a > 1$ thì $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. 2.

7. (1 ; 1).

8. 60°.

9. a) $c = 2$, $b = -1$, $d = 1$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1\ ;$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1\ ;\ 3)$ là

$$y - 3 = 3(x - 1) \text{ hay } y = 3x.$$

c) $f'(\sin t) = 3\sin^2 t - 2\sin t + 2$.

$f'(\sin t) = 3 \Leftrightarrow 3\sin^2 t - 2\sin t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \sin t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ t = \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right) + k2\pi \\ t = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

d) $f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f''(\cos t) = 6\cos t - 2$;

$g'(x) = 2x - 3 \Rightarrow g'(\sin t) = 2\sin t - 3.$

Vậy $6\cos t - 2 = 2\sin t - 3$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin t - 6\cos t = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin t - 3\cos t = \frac{1}{2}$. Đặt $\tan\varphi = 3$, ta được

$\sin(t - \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi = \alpha$. Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} t = \varphi + \arcsin\alpha + k2\pi \\ t = \pi + \varphi - \arcsin\alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

e) $$\lim_{z\to 0}\frac{f''(\sin 5z) + 2}{g'(\sin 3z) + 3} = \lim_{z\to 0}\frac{6\sin 5z}{2\sin 3z}$$

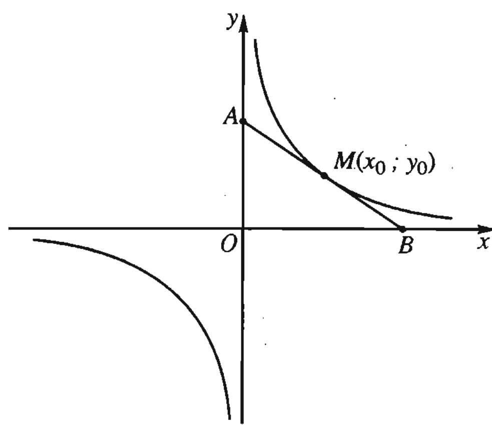
$$= 5\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5z}{5z}}{\dfrac{\sin 3z}{3z}} = 5.$$

10. $y = \frac{a^2}{x} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{a^2}{x_0^2}.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0\,;\,y_0)$ là

$$y - \frac{a^2}{x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{a^2x}{x_0^2} + \frac{2a^2}{x_0}.$$



Suy ra diện tích tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2}.\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|.2|x_0| = 2a^2 = \text{const.}$$

11. HD : Chứng minh bằng quy nạp.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Chứng minh các hệ thức sau :

a) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{14}{3}\pi\right) + \sin\left(\alpha - \frac{8}{3}\pi\right) = 0$;

b) $\frac{\sin 4a}{1+\cos 4a}.\frac{\cos 2a}{1+\cos 2a} = \cot\left(\frac{3}{2}\pi - a\right)$;

c) $(\cos a - \cos b)^2 - (\sin a - \sin b)^2 = -4\sin^2\frac{a-b}{2}\cos(a+b)$;

d) $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ\cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

2. Biến đổi thành tích

a) $1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) + \cot\left(\frac{5}{2}\pi + 3\alpha\right)$;

b) $\frac{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha - \cos 9\alpha + \cos 10\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha + \sin 10\alpha}$;

c) $-\cos 5a\cos 4a - \cos 4a\cos 3a + 2\cos^2 2a\cos a$.

3. Giả sử A, B, C là ba góc của tam giác ABC, chứng minh rằng :

a) $\frac{\sin C}{\cos A\cos B} = \tan A + \tan B$;

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

c) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$.

4. Cho hàm số $y = \sin 4x$.

a) Chứng minh rằng $\sin 4(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin 4x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó vẽ đồ thị của các hàm số

$y = \sin 4x$; (C_1)

$y = \sin 4x + 1$. (C_2)

b) Xác định giá trị của m để phương trình

$$\sin 4x + 1 = m \quad (1)$$

– Có nghiệm ;

– Vô nghiệm.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{24}$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x + 1.$$

6. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{\tan x + \sin x}{\cot x}. \qquad (C)$$

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

c) Biến đổi biểu thức $\frac{\tan x + \sin x}{\cot x}$ thành tích.

d) Chứng tỏ rằng điểm $\left(\frac{\pi}{3} ; \frac{9}{2}\right)$ thuộc (C).

7. Giải các phương trình

a) $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;

b) $3\sin 5x - 2\cos 5x = 3$;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$;

d) $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2}\sin 3z$.

8. Giải các phương trình

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;

b) $\cos 4x\cos(\pi + 2x) - \sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$;

c) $\tan(120^\circ + 3x) - \tan(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$;

d) $\tan^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}.\cot\frac{x}{2}+\cot^2\frac{x}{2}+\sin x=4$;

e) $\dfrac{\sin 2t+2\cos^2 t-1}{\cos t-\cos 3t+\sin 3t-\sin t}=\cos t.$

9. Giải các phương trình

a) $\cos(22^o-t)\cos(82^o-t)+\cos(112^o-t)\cos(172^o-t)=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$;

b) $\sin^2(t+45^o)-\sin^2(t-30^o)-\sin 15^o\cos(2t+15^o)=\frac{1}{2}\sin 6t$;

c) $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\dfrac{41}{128}$;

d) $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4$;

e) $\tan(\pi\cos t)=\cot(\pi\sin t)$.

10. Có bao nhiêu số gồm tám chữ số, trong đó có đúng hai chữ số 2 ?

11. Một tổ có 10 học sinh trong đó có An, Bình, Chi, Dung và Hương. Có bao nhiêu cách xếp 10 bạn đó vào 10 ghế sắp thành hàng ngang sao cho An, Bình ngồi cạnh nhau và Chi, Dung, Hương cũng ngồi cạnh nhau ?

12. Một trăm tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

Kí hiệu A và B là các biến cố

A : "Thẻ được lấy ghi số chia hết cho 3",

B : " Thẻ được lấy ghi số chia hết cho 5".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$;

b) A và B có độc lập không, vì sao ?

c) Cũng hỏi như trên nhưng số thẻ là 105 và được đánh số từ 1 đến 105.

13. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 1 bi đỏ và 2 bi xanh, hộp thứ hai chứa 2 bi đỏ và 1 bi xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 bi. Tính xác xuất sao cho 2 bi lấy ra cùng màu.

14. Tìm cấp số cộng a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, biết rằng

$$a_1+a_3+a_5=-12 \text{ và } a_1a_3a_5=80.$$

15. Viết ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết rằng tổng n số hạng đầu tiên của cấp số này là

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

16. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{7}{2},$$

trong đó $|x| < 1$.

17. Tìm số hạng thứ nhất a_1 và công bội q của một cấp số nhân (a_n), biết rằng

$$a_4 - a_2 = -1\frac{13}{32} \quad \text{và} \quad a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}.$$

18. Chứng minh rằng ba số hạng đầu của tổng

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{6} + ...$$

lập thành một cấp số nhân và tính tổng trên với giả thiết rằng các số hạng tiếp theo được tạo thành theo quy luật của cấp số nhân đó.

Trong các bài tập 19, 20, hãy tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

19. a) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

b) $x_n = \sqrt[3]{1+n^3} - n$;

c) $x_n = n^2\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$;

d) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$;

20. a) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$;

b) $x_n = \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1-4n}{2n^2}\right)$.

21. Xét tính bị chặn của các dãy số với số hạng tổng quát sau :

a) $x_n = \dfrac{5n^2}{n^2+3}$;

b) $y_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1}\sin n$;

c) $z_n = n\cos n\pi$.

22. Chứng minh rằng dãy số sau đây tăng và bị chặn trên :

$$x_1 = \frac{1}{5+1}, \quad x_2 = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1}, \quad x_3 = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1}, \ldots$$

23. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x - 2}$;

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$.

24. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 4} - \dfrac{x^2}{3x+2} \right)$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+1} - 3x \right)$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2-3} - 5x \right)$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

25. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

26. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;

b) $y = \dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$;

c) $y = \cos 2x - 2\sin x$;

d) $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

e) $y = \cos^2 \dfrac{x}{3} \tan \dfrac{x}{2}$;

f) $y = \sqrt{\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

27. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ A, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Xác định A để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. Với giá trị A tìm được, hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ không ?

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{14}{3}\pi\right) + \sin\left(\alpha - \dfrac{8}{3}\pi\right) =$

$$= \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} = 0.$$

b) $\dfrac{\sin 4a}{1+\cos 4a} \cdot \dfrac{\cos 2a}{1+\cos 2a} = \dfrac{2\sin 2a\cos^2 2a}{2\cos^2 2a . 2\cos^2 a}$

$$= \frac{2\sin a\cos a}{2\cos^2 a} = \tan a = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - a\right).$$

c) $(\cos a - \cos b)^2 - (\sin a - \sin b)^2 =$

$$= 4\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{a-b}{2} - 4\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{a-b}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{a-b}{2}\left(\sin^2\frac{a+b}{2} - \cos^2\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 4\sin^2\frac{a-b}{2}\left(1 - 2\cos^2\frac{a+b}{2}\right) = -4\sin^2\frac{a-b}{2}\cos(a+b).$$

d) $\sin^2(45^o + \alpha) - \sin^2(30^o - \alpha) - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha) =$

$= [\sin(45^o + \alpha) + \sin(30^o - \alpha)][\sin(45^o + \alpha) - \sin(30^o - \alpha)] - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha)$

$$= 2\sin\frac{75^o}{2}\cos\left(\frac{15^o}{2} + \alpha\right).2\cos\frac{75^o}{2}\sin\left(\frac{15^o}{2} + \alpha\right) - \sin 15^o\cos(15^o + 2\alpha)$$

$= \sin 75^o\sin(15^o + 2\alpha) - \cos 75^o\cos(15^o + 2\alpha)$

$= -\cos(90^o + 2\alpha) = \cos(90^o - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

2. a) $1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) + \cot\left(\frac{5}{2}\pi + 3\alpha\right)$

$$= 1 - \sin 3\alpha + \cos 3\alpha - \tan 3\alpha$$

$$= \frac{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha\cos 3\alpha + \cos^2 3\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$$

$$= \frac{(\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)(1 + \cos 3\alpha)}{\cos 3\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right).2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}{\cos 3\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}.$$

b) $\dfrac{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha - \cos 9\alpha + \cos 10\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha + \sin 10\alpha} = \dfrac{2\sin 8\alpha\sin\alpha - 2\sin 9\alpha\sin\alpha}{2\cos 8\alpha\sin\alpha + 2\cos 9\alpha\sin\alpha}$

$$= \frac{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha}{\cos 9\alpha - \cos 8\alpha} = \frac{-2\cos\frac{17\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{-2\sin\frac{17\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{17\alpha}{2}.$$

c) $-\cos 5a\cos 4a - \cos 4a\cos 3a + 2\cos^2 2a\cos a$

$= -\cos 4a(\cos 5a + \cos 3a) + 2\cos^2 2a\cos a$

$= -2\cos 4a\cos 4a\cos a + 2\cos^2 2a\cos a$

$= 2\cos a(\cos^2 2a - \cos^2 4a)$

$= 2\cos a(\cos 2a + \cos 4a)(\cos 2a - \cos 4a)$

$= 2\cos a \,.\, 2\cos 3a\cos a \,.\, 2\sin 3a\sin a$

$= 2\cos a\sin 2a\sin 6a.$

3. a) HD : Thay $\sin C = \sin(A + B)$.

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$ (1)

c) Chứng minh tương tự câu b) ta có

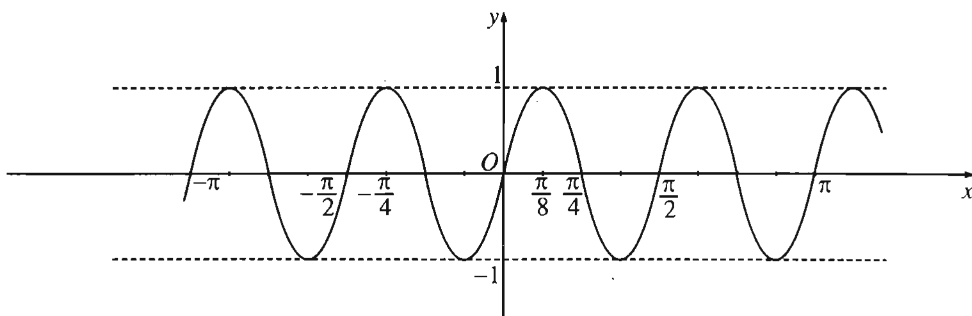
$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

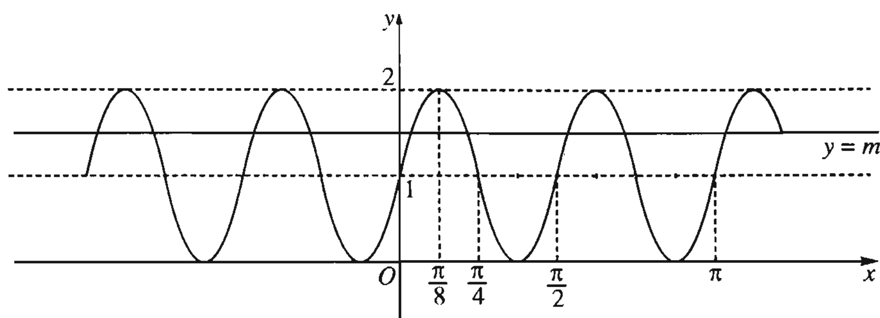
4. a) Ta có $\sin 4(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin(4x + 2k\pi) = \sin 4x$ với $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra hàm số $y = \sin 4x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$.

Vì hàm số $y = \sin 4x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó có tâm đối xứng là gốc toạ độ O.

Các hàm số $y = \sin 4x$ (C_1) và $y = \sin 4x + 1$ (C_2) có đồ thị như trên hình 1 và hình 2.



Hình 1. Đồ thị hàm số $y = \sin 4x$



Hình 2. Đồ thị hàm số $y = \sin 4x + 1$

b) Vì $\sin 4x + 1 = m \Leftrightarrow \sin 4x = m - 1$

và $\quad -1 \le \sin 4x \le 1$

nên $\quad -1 \le m - 1 \le 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le m \le 2$.

Từ đó, phương trình (1) có nghiệm khi $0 \le m \le 2$ và vô nghiệm khi $m > 2$ hoặc $m < 0$.

c) Phương trình tiếp tuyến của (C_2) có dạng

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Với $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{24}$ ta có $y_0 = \sin\dfrac{\pi}{6} + 1 = \dfrac{3}{2}$;

$$y'(x) = 4\cos 4x \Rightarrow y'(x_0) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là

$$y - \frac{3}{2} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{24}\right) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{3}{2}.$$

5. Ta có $y = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x - \dfrac{3}{2}(1 + \cos 2x) + 1$

$$= 2\sin 2x - 2\cos 2x = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do đó GTLN của hàm số là $2\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ hay

$2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là khi $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

GTNN của hàm số là $-2\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-1$ hay $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, tức là khi $x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

6. a) Vì $\tan x$ xác định với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $\cot x$ xác định với $x\neq k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) nên tập xác định của hàm số đã cho là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\,;\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b) Vì $x\in D\Leftrightarrow -x\in D$ và

$$f(-x)=\frac{\tan(-x)+\sin(-x)}{\cot(-x)}=\frac{-\tan x-\sin x}{-\cot x}=f(x)$$

nên hàm số là chẵn trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Ta có, với $x\neq k\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\tan x+\sin x}{\cot x}=\tan x(\tan x+\sin x)=\tan^2 x(1+\cos x)=2\tan^2 x.\cos^2\frac{x}{2}.$$

d) Ta có $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=2(\sqrt{3})^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

Do đó điểm $\left(\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{9}{2}\right)$ thuộc (C).

Trong các công thức nghiệm dưới đây (BT 7, 8, 9), k là số nguyên.

7. a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\quad x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $\quad x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

b) $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$; $\quad x=\frac{2}{5}\arctan 5+\frac{2k\pi}{5}$.

c) $x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$; $\quad x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$.

d) $z=(8k+1)\frac{\pi}{4}$; $\quad z=(8k+3)\frac{\pi}{20}$.

8. a) $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{k\pi}{5}$.

b) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

c) $x = -40^\circ + k60^\circ$.

d) $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi$.

e) $t = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$.

9. a) $t = k360^\circ$; $t = (4k + 1)90^\circ$.

b) $t = k90^\circ$; $t = \pm 15^\circ + k90^\circ$.

c) $x = (3k \pm 1)\frac{\pi}{12}$.

d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

e) $t = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi$.

10. a) Giả sử chữ số 2 đứng đầu. Khi đó, chữ số 2 kia sẽ được xếp vào một trong bảy chỗ còn lại. Có 7 cách. Khi đã xếp xong hai chữ số 2, còn 6 chỗ, ta xếp 9 chữ số khác 2 vào 6 chỗ đó. Ta có 9^6 cách. Theo quy tắc nhân, có 7.9^6 số gồm 8 chữ số mà chữ số 2 đứng đầu.

b) Chữ số 2 không đứng đầu. Khi đó, trong 8 chữ số khác không và khác 2, ta chọn một chữ số để xếp vào vị trí đầu. Có 8 cách.

Chọn hai chỗ trong bảy chỗ để xếp chữ số 2. Có C_7^2 cách.

Xếp chín chữ số (khác 2) vào năm vị trí còn lại, có 9^5 cách.

Theo quy tắc nhân, có $8.C_7^2.9^5$ số mà chữ số 2 không đứng đầu.

Theo quy tắc cộng, số các số có 8 chữ số mà có đúng hai chữ số 2 là

$$7.9^6 + 8.C_7^2.9^5 = 13\,640\,319.$$

11. Đầu tiên ta chỉ dùng 7 ghế và xếp An, Chi và 5 bạn không thuộc nhóm An, Chi vào 7 ghế. Ta có 7! cách xếp. Sau đó xếp Bình ngồi cạnh An. Có 2! cách. Cuối cùng xếp Chi, Hương ngồi cùng nhóm với Dung. Ta có 3! cách. Theo quy tắc nhân, có 7! 2! 3! = 60 480 cách.

12. Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, ..., 100\}$.

$$A = \{3, 6, 9, ..., 99\}, n(A) = 33.$$
$$B = \{5, 10, ..., 100\}, n(B) = 20.$$

a) $$P(A) = \frac{33}{100}, P(B) = \frac{20}{100}.$$

b) $$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \;;$$
$$P(A \cap B) = \frac{6}{100} \neq P(A) \,.\, P(B).$$

Vậy A và B không độc lập.

– Nếu có 105 thẻ thì xét tương tự, ta có :

$$n(A) = 35, P(A) = \frac{35}{105} = \frac{1}{3} \;;$$

$$n(B) = 21, P(B) = \frac{21}{105} = \frac{1}{5} \;;$$

$$n(A \cap B) = 7 \;;$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{105} = \frac{1}{15} = P(A) \,.\, P(B).$$

Vậy A và B độc lập.

13. Kí hiệu A_i là biến cố "Bi lấy từ hộp thứ i màu đỏ", $i = 1, 2$. Biến cố cần tìm xác suất là $A = A_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2$.

Do A_1 và A_2 độc lập nên

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

14. Kí hiệu công sai là d, ta có

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12 \\ a_1 a_3 a_5 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -4 \\ a_1(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2d - 4 \\ 16(d + 2)(d - 2) = 80. \end{cases}$$

Giải ra ta được $d = \pm 3$.

Các cấp số cộng phải tìm là

$$2, -1, -4, -7, \ldots$$

và $$-10, -7, -4, -1, \ldots$$

15. Ta có $S_1 = u_1 = 4 \,.\, 1^2 - 3.1 = 1$

và $$\frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = 4n^2 - 3n$$

$$\Rightarrow [2 + (n-1)d] = 2(4n - 3) \Rightarrow d = 8.$$

Từ đó $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 17.$

16. Vì $|x| < 1$ nên với $u_1 = x$, $q = x$ ta có

$$S = \frac{u_1}{1-q} = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{x} + S = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x(1-x)} = \frac{7}{2}$$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

17. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1q^3 - a_1q = -\dfrac{45}{32} \\ a_1q^5 - a_1q^3 = -\dfrac{45}{512}. \end{cases}$$

Từ đó rút ra $q^2 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow q = \pm\dfrac{1}{4}$.

Với $q = \dfrac{1}{4}$ thì $a_1 = 6$;

$q = -\dfrac{1}{4}$ thì $a_1 = -6$.

18. Ta có

$$a_2^2 = \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{6}(2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{6} = a_1.\,a_3.$$

Vậy 3 số hạng đầu lập thành cấp số nhân với công bội là

$$q = \frac{1}{3-\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}}.$$

Rõ ràng $|q| < 1$, nên tổng vô hạn trên là

$$S = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : \left(1 - \frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = 3 + \sqrt{3}.$$

19. a) $$x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+1} \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{2}.$$

b) $$x_n = \sqrt[3]{1+n^3} - n = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+n^3)^2} + n\sqrt[3]{1+n^3} + n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim x_n = 0.$$

c) $$x_n = \frac{n^2\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)}{1} = \frac{-n^2}{n + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= -n.\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} \to -\infty \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

d) $$x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{n} - 1} + 1} \to \frac{1}{3} \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

20. a) $$x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n} - n} = \frac{n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)}{n\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1} \Rightarrow \lim x_n = +\infty.$$

b) $$x_n = n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n} - 2\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2n} - 2\right)$$

$$\Rightarrow \lim x_n = 1.(-2) = -2.$$

21. a) Dãy (x_n) bị chặn vì

$$0 < \frac{5n^2}{n^2+3} < 5 \text{ với mọi } n \text{ ;}$$

b) Dãy (y_n) bị chặn vì

$$|y_n| = \left|(-1)^n\right|.\frac{2n}{n+1}.|\sin n| < \frac{2n}{n+1} < 2 \text{ ;}$$

c) Dãy (z_n) không bị chặn vì

$$|z_n| = |n\cos n\pi| = n.$$

22. Dãy số $\{x_n\}$ tăng vì $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{5^{n+1}+1} > x_n$.

Mặt khác, dãy số này bị chặn trên vì

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) < \frac{1}{4} \text{ với mọi } n.$$

23. a) 4.

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}.$$

c) $$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+4x^2}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3} = \frac{5}{6}.$$

e) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4} = -\frac{1}{12}.$$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7(1-x)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{8(1-x)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}$

$$=\frac{7}{8}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}=\frac{7}{12}.$$

24. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{9+\dfrac{6}{x}-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{2x^2-3}+(-5x)\right]=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{2}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

25. a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a.$

b) Đặt $1-x=t$ ($t\to 0$ khi $x\to 1$), ta có

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 0}t\tan(1-t)\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cot\frac{\pi}{2}t=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}t.\dfrac{2}{\pi}}{\tan\dfrac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}.$$

➤ **Chú ý.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}=1.$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{2}.$$

26. a) $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$

b) $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(x\neq 1).$

c) $-2\cos x(1+\sin x).$

d) $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$

e) $-\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\tan\frac{x}{2}.$

f) $\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}}.$

27. $A=0$. Khi đó $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN XUÂN BÌNH - NGUYỄN NGỌC TÚ**

Biên tập tái bản : **NGUYỄN XUÂN BÌNH**

Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN THANH THUÝ – TRẦN THANH HẰNG**

Trình bày bìa : **TRẦN THUÝ HẠNH**

Sửa bản in : **LÊ THỊ THANH HẰNG**

Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Mã số : CB103T1

In 35.000 cuốn, khổ 17 x 24 cm.
In tại Công ty TNHH MTV In Quảng Ninh.
Số in: 2134. Số xuất bản: 01-2011/CXB/824-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2011.





SÁCH BÀI TẬP LỚP 11

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 11
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 11
5. BÀI TẬP SINH HỌC 11
6. BÀI TẬP ĐỊA LÍ 11
7. BÀI TẬP TIN HỌC 11
8. BÀI TẬP NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
9. BÀI TẬP LỊCH SỬ 11
10. BÀI TẬP TIẾNG ANH 11
11. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 11
12. BÀI TẬP TIẾNG NGA 11

SÁCH BÀI TẬP LỚP 11 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
- BÀI TẬP VẬT LÍ 11
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 11
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 11

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.
– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn





Giá: 12.400đ